THESES

Présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE CAEN

pour obtenir

LE GRADE D'INGENIEUR DOCTEUR

par

Jean-Claude ARINAL

Première Thèse :

Programmes linéaires appliqués aux problèmes de transport

Deuxième Thèse :

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 28 Novembre 1963 devant la Commission d'examen

M M. PALLU de la BARRIERE Président

NATAF

PHAM

Les problèmes de transport, présentant des caractéristiques particulières, ont été considérés comme un chapitre à part dans l'étude des programmes linéaires. Après H.L Hitchcock de nombreux chercheurs se sont intéressés à la structure spéciale de ces problèmes et leurs solutions ont été mises au point depuis quelques années déjà.

Ce travail ne se présente donc pas comme une innovation spectaculaire dans ce domaine, mais plutôt comme une simple contribution apportée à la mise en oeuvre des méthodes générales déjà connues.

Il comporte deux parties :

- La première partie, divisée en six chapitres, est destinée à la résolution d'un problème réel de gestion, proposé à l'origine par ELECTRICITE DE FRANCE, mais réduit dans le cadre de cette thèse à un modèle théorique simplifié. La solution finale préconisée se présente sous la forme d'une solution graphique associée d'un algorithme de calcul.

- La deuxième partie, divisée en quatre chapitres, est destinée à la résolution par une méthode différente des méthodes antérieures du problème de transport général. Cette méthode est assez directement liée aux travaux de L.FORD et R.FULKERSON connus sous le nom de Méthode PRIMAL-DUAL.

Toutes deux sont susceptibles d'avoir des applications pratiques.

.../...

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur R.PALLU de la BARRIERE pour avoir dirigé les recherches qui ont abouti à l'élaboration de cette thèse et de présenter mes remerciements les plus vifs au Professeur NATAF et au Professeur PHAM pour avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury d'examen.

Q'il me soit aussi permis de renouveler l'expression de ma gratitude à Monsieur J. ABADIE et à Monsieur J.L.CARPENTIER pour l'aide et les conseils qu'ils m'ont toujours si gentiment accordés.

Ce travail a pu être entrepris et achevé grâce au soutien et à la compréhension de la DIRECTION DES ETUDES ET RECHERCHES de l'ELECTRICITE DE FRANCE et de ses responsables, en particulier du "Service des Etudes de Réseaux et de Calcul Automatique". Je remercie également les membres du Département d'Analyse Opérationnelle et Automatique Numérique et Monsieur P.HUARD pour les encouragements et l'aide efficace qu'ils mont apportés.

UNIVERSITE DE CAEN

FACULTE des SCIENCES

OL/MJ.

ANNEE SCOLAIRE 1963-1964

PERSONNEL ENSEIGNANT DE LA FACULTE DES SCIENCES

MM. LOZAC'H	Doyen, Professeur (Chimie)
DANGEARD	Professeur (Géologie)
SCHERER	Professeur (Physique Générale)
APERY	Professeur (Mathématiques pures)
JACQUET	Professeur (Microbiologie)
BOCQUET	Assesseur, Professeur (Zoologie)
Mme WALTER-LEVY	Professeur (Chimie)
MM. PITOT	Professeur (Botanique)
CAMPBELL	Professeur (Mécanique rationnelle)
VIALLE	Professeur (Chimie)
COJAN	Professeur (Physique)
PALLU de la BARRIERE	Professeur (Mathématiques)
PHAM	Professeur (Mathématiques)
GIACOMO	Professeur (Physique)
MONIER	Professeur (Minéralogie)
CONIA	Professeur (Chimie)
PAREYN	Professeur (Géologie)
Mme GAYRAL	Professeur (Botanique)
MM. ROMANET	Professeur (Chimie)
BINET	Professeur (Botanique)
THUREAU	Professeur (Physique)
DOGUET	Professeur sans chaire (Biologie végétale)
RYBAK	Professeur sans chaire (Physiologie animale)
MABBOUX-STROMBERG	Professeur sans chaire (Physique)
NATAF	Professeur sans chaire (Mathématiques)
BERNARD Maurice	Professeur sans chaire (Chimie)
BARRAT	Maître de conférences (Physique)
LEGROS	Maître de conférences (Physique)
GAULT	Maître de conférences (Chimie)
SALMON	Maître de conférences (Physique)
Melle DEMEUSY	Maître de conférences (Biologie)
PINAZZI	Maître de conférences (Chimie)
KAUFFMANN	Maître de conférences (Microbiologie)
Mme CONNES	Maître de conférences (Physique)
M. DESCHANVRES	Maître de conférences (Chimie)
Mme BLANCHETON	Maître de conférences (Mathématiques)
MM. THUILLIER	Maître de conférences (Chimie)
MERCOUROFF	Maître de conférences (Physique)
SIGNORET	Maître de conférences (Zoologie)
CACHON	Maître de conférences (Zoologie)
PONS	Maître de conférences (Physique appliquée)
FORTINI	Maître de conférences (Electronique)
HERVE	Maître de conférences (Mécanique Appliquée)
Mme GHINEA	Chargée d'enseignement (Mathématiques)
M. BERNARD Jean	Chargé d'enseignement (Mathématiques)
M. CAUCAL	Conseiller Administratif Chef des Services Administratifs de la Faculté des Sciences.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

PROGRAMMES LINEAIRES

appliqués aux PROBLEMES de TRANSPORT

par **J.C ARINAL**

à ma mère

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542709_0003

1ère PARTIE

RESOLUTION DES PROGRAMMES DE TRANSPORT

ENTRE n SOURCES ET 2 OU 3 ARRIVEES:

RESOLUTION GRAPHIQUE

Chapitre I

INTRODUCTION

Le problème posé, à l'origine de la présente étude, était l'optimisation de la gestion d'un vaste ensemble d'opération comportant :

- l'acheminement de combustible houiller depuis certains ports et mines vers certaines centrales thermiques où le combustible devait être stocké et brûlé, et

- la production par ces centrales d'énergie électrique qui, concurremment avec des énergies électriques d'origine différente - en particulier hydraulique - devait servir à satisfaire la demande nationale.

Sous cette forme générale, en plus de son énormité, le problème comportait un aspect aléatoire qui en rendait la résolution encore plus difficile.

Dans une première approche très grossière, nous avons constitué un modèle artificiel, en supprimant l'aspect aléatoire du problème et en diminuant considérablement le nombre des inconnues et des contraintes.

L'optimisation de la gestion devenait l'optimisation d'une certaine fonction de coût relative à un programme linéaire comportant un programme de transport du combustible entre n sources et 3 arrivées $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ et un programme conséquent de production électrique pour les trois usines installées en $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$.

Etant donnés les inconnues q_j quantité de combustible exigée à l'usine Q_j $j \in (123$

S_j stock final "

C_j consommation "

r_{ij} quantité de combustible transportée de T_i vers Q_j

les données t_i quantité de combustible exigée à la source T_i $i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$

S_{jo} et σ_j stock initial et stock limite à l'usine Q_j

η_j rendement de l'usine Q_j

W puissance demandée au réseau.

les coûts unitaires s_j de stockage

p_j de consommation

c_{ij} de transport

et le système de contrainte $\eta_1 c_1 + \eta_2 c_2 + \eta_3 c_3 = W$

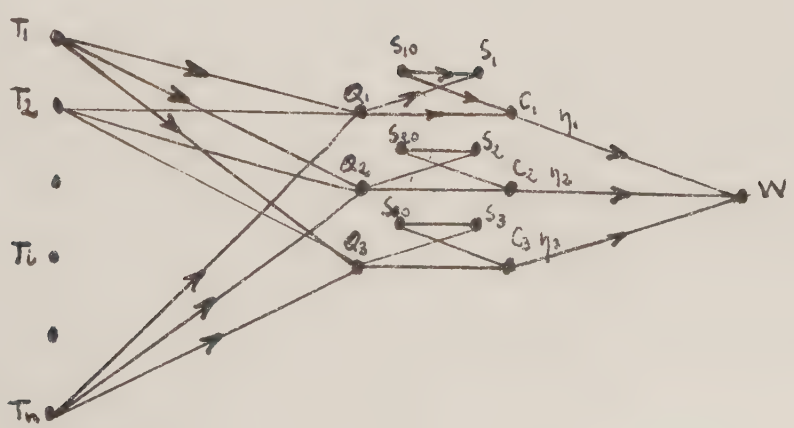
$s_j \geqslant \sigma_j \qquad \forall j \in (123)$

$\sum_j r_{ij} = t_i \qquad \forall i \in (12\ldots n)$

$C_j + S_j = S_{jo} + \sum_i r_{ij} \qquad \forall j$

$r_{ij},\ S_j,\ C_j \geqslant 0$

représentés par le graphe



nous pouvons présenter le problème sous la forme matricielle.

C_1 C_2 C_3	S_1 S_2 S_3	r_{11} r_{12} r_{13}	r_{21} r_{22} r_{23}	.....	r_{n1} r_{n2} r_{n3}	
η_1 η_2 η_3						W
	1 1 1					$\geq \mathcal{C}_1$ $\geq \mathcal{C}_2$ $\geq \mathcal{C}_3$
		1 1 1				T_1
			1 1 1			T_2
					1 1 1	T_n
1 1 1	1 1 1	–1 –1 –1	–1 –1 –1	–1 –1 –1	–1 –1 –1	S_1^0 S_2^0 S_1^0
p_1 p_2 p_3	s_1 s_2 s_3	C_{11} C_{12} C_{13}	C_{21} C_{22} C_{23}	.....	C_{n1} C_{n2} C_{n3}	F de coût

La solution de ce programme est donnée par la méthode simpliciale ou mieux par la méthode de décomposition de Dantzig et Wolfe.

Cependant la résolution du programme global par ces méthodes correspond sur le plan économique à l'existence d'une entreprise totalement centralisée dans laquelle la direction, au vu des informations données par le service Transport et le service production, organise elle-même à la fois les transports et la production de telle manière que le prix de revient global soit minimum.

Est-il possible d'aborder le problème comme s'il consistait en la recherche de l'intérêt général – prix de revient global minimum – par un ajustement des prétentions de deux sociétés complémentaires mais indépendantes l'une s'occupant du transport et l'autre de la production, chacune d'elle essayant de fonctionner aux meilleures conditions possibles ?

.../..

Chapitre II

RAPPELS DE LA THEORIE DES GRAPHES

Dans ce chapitre nous préciserons certaines définitions et certains théorèmes de la théorie des graphes, que nous énoncerons sans en donner la démonstration, mais qui seront nécessaires dans les chapitres suivants.

1 Graphes : Soit un ensemble X et une application Γ de X dans X, le couple formé par l'ensemble X et l'application Γ est un graphe que l'on note

$$G = (X, \Gamma) .$$

Définitions relatives aux graphes :

Considérons le graphe fini non orienté $G = (U, X)$.

U désigne l'ensemble des arêtes $U = \{u_1, u_2 \dots u_m\}$

X désigne l'ensemble des sommets $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$

U_x désigne l'ensemble des arêtes incidentes au sommet x.

Si $|U_x| = 0$ le sommet x est dit "isolé"

Si $|U_x| = 1$ le sommet x est dit "pendant"

Matrice d'incidence

Une orientation arbitraire des arêtes du graphe G, détermine le graphe G orienté $G = (U, X)$

U désigne l'ensemble des arcs $|U| = m$

X désigne l'ensemble des sommets $|X| = n$

.../...

L'élément générique s^i_j de la matrice d'incidence aux arcs $S = S^n_m$ est obtenu de la manière suivante :

$$s^i_j = \begin{cases} +1 \text{ si } x_i \text{ est l'extrémité initiale de } u_j \\ -1 \text{ si } x_i \text{ est l'extrémité finale de } u_j \\ 0 \text{ si } x_i \text{ n'est pas extrémité de } u_j \end{cases}$$

Remarque : On peut définir de la même manière la matrice R^n_m d'incidence aux arêtes du graphe G non-orienté :

$$r^i_j = \begin{cases} +1 \text{ si } x_i \text{ ost extrémité de } u_j \\ 0 \text{ si } x_i \text{ n'est pas extrémité de } u_j \end{cases}$$

Configuration linéaire :

Le couple formé par le sous-ensemble Xm , Xm C X et l'ensemble U est par définition la configuration linéaire H

$$H = (Xm, U) \qquad Xm = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$
$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$$

On lui associe la matrice carrée S^M_M.

Chaîne : Une chaîne est une séquence d'arêtes, deux arêtes successives ayant une extrémité commune et une seule.

Chemin : Un chemin est une séquence d'arcs, deux arcs successifs étant tels que l'extrémité positive à l'un coincide avec l'extrémité négative de l'autre. Un chemin possède un sens de parcours.

Cycle : Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités coincident.

Théorème : Soit une configuration linéaire H constituée de m sommets et de m arcs, si H contient les arcs d'un cycle on a :

$$\mathrm{Det}\left[S^M_M\right] = 0$$

Arbres : Un arbre ost par définition un graphe fini, connexe, sans cycles ayant au moins deux sommets.

.../...

Théorème 1 - Soit $G = (X,U)$, $|X| = n > 1$, les propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre.

1) G est connexe et sans cycles
2) G est sans cycles et admet n-1 arêtes
3) G est connexe et admet n-1 arêtes
4) G est sans cycles et en ajoutant une arête entre deux sommets non adjacents on créé un cycle et un seul.
5) G est connexe et en supprimant une arête quelconque il n'est plus connexe
6) tout couple de sommets est relié par une chaîne et une seule.

Théorème 2 - Un arbre admet au moins deux sommets pendants.

Théorème 3 - Un graphe $G = (X, U)$ admet un graphe partiel qui soit un arbre si et seulement si il est connexe.

Théorème 4 - Un graphe G formé de m+1 sommets $x_1, x_2 \ldots x_{m+1}$ et de m arêtes $u_1, u_2 \ldots u_m$ est un arbre si et seulement si la matrice carrée S_M^M en onlevant la $(m+1)^{ème}$ ligne, a son déterminant égal à +1 ou -1 ; dans tous les autres cas $Det\ (S_M^M) = 0$

Autres définitions.

Considérons un graphe orienté G X,U et un arbre a extrait du graphe G et possédant les mêmes sommets que lui.

1) Un sommet pendant particulier de l'arbre soit Xo sera appele sommet de référence.

2) Les arcs de G non inclus dans l'arbre (a) sont des cordes.

3) L'ensemble des arcs du graphe G incidents avec le sommet $x \neq xo$, changés ou non de sens de telle sorte qu'ils convergent tous vers x, est appelé étoile e(x) relative au sommet x.

4) L'ensemble des arcs de l'arbre (a), changés ou non de sens, qui constituent un chemin du sommet de référence xo au sommet x est la piste $\pi(x)$ relative au sommet x.

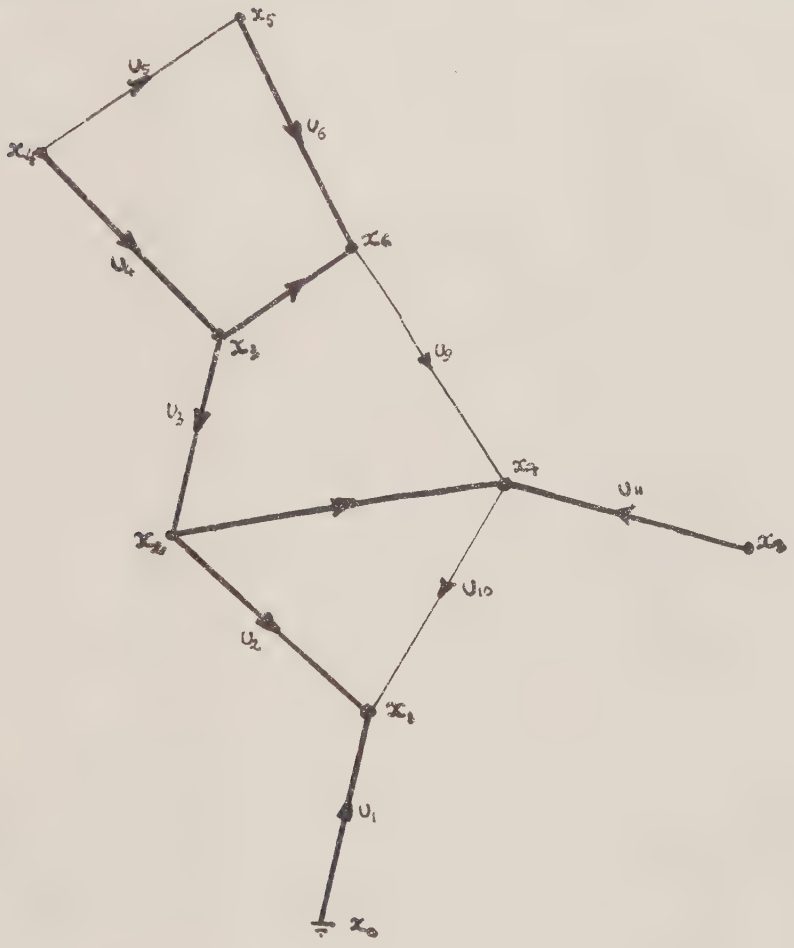
5) La séquence d'arcs du graphe G, composée d'un chemin supporté par l'arbre (a) entre les sommets x_1 et x_2 et formé d'arcs de l'arbre (a) changés ou non de sens, et d'une corde x_2x_1 telle que l'ensemble soit supporté par un cycle ost la maille $m(x_1)$ de G.

Le sens de la maille est défini par le sens de la corde $x_2\ x_1$.

.../...

L'ensemble des mailles ainsi définies, relatives aux différentes cordes du graphe G et orientées par ces cordes, forme une base pour l'ensemble des mailles que l'on peut construire sur le graphe G, c'est-à-dire à l'aide des arcs du graphe G changés ou non de signe.

Exemple :



Graphe G (X,U) :

Ensemble des sommets X : $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$

Ensemble des arcs U : $\{u_1, u_2, \ldots \quad u_{10}, u_{11}\}$

Arbre (a) (X, U_a)

U_a : $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_8, u_{11}\}$

Cordes $\{u_5, u_9, u_{10}\}$

Sommet de référence x_0

Maille $m(x_1)$ $\{-u_2, +u_8, +u_{10}\}$

étoile $e(x_7)$ $\{+u_8, +u_9, +u_{11}, -u_{10}\}$

piste $\pi(x_3)$ $\{+u_1, -u_2, +u_3\}$

.../...

1 Matrice d'incidence Branche-Maille M

Soit U l'ensemble des arcs ou branches u du graphe G (X,U) indices j et M l'ensemble des mailles m indicées μ.

L'élément générique M_j^{μ} est

$M_j^{\mu} = +1$ si la branche u_j appartient à la maille m_μ

$M_j^{\mu} = -1$ si la branche u_j changée de sens appartient à m_μ

$M_j^{\mu} = 0$ si la branche u_j n'appartient pas à m_μ

2 Matrice d'incidence Branche-Etoile E

Soit X-xo l'ensemble des sommets du graphe G, sauf le sommet de référence, indicés i.

L'élément générique est e_j^i

$o_j^i = +1$ si la branche u_j est incidente positivement avec le sommet x_i

$o_j^i = -1$ si la branche u_j est incidente négativement avec le sommet x_i

$e_j^i = 0$ si la branche u_j n'est pas incidente avec le sommet x_i.

3 Matrice d'incidence Branche-piste P

Soit (X - xo) l'ensemble des sommets de G. Indices i

L'élément générique p_j^i est

$p_j^i = +1$ si la branche u_j appartient à la piste π i

$p_j^i = -1$ si la branche $-u_j$ appartient à la piste π i,

$p_j^i = 0$ si la branche u_j n'appartient pas à la piste π i.

.../...

4 Matrice d'incidence ou d'identification Branche-Corde C

Soit U_I l'ensemble des cordes C indicées k

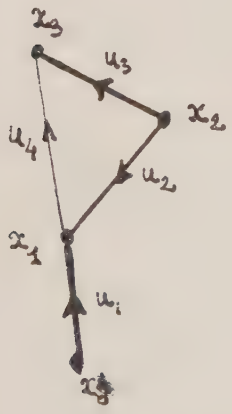
$C_j^k = 1$ si la branche u_j est la corde ck

$C_j^k = 0$ si la branche u_j n'est pas la corde ck.

Les matrices M, P, E, C, que nous venons de définir satisfont aux relations suivantes : u étant une matrice unité

$E^T M = 0$	ou	$M^T E = 0$
$E^T P = u$	ou	$P^T E = u$
$P E^T = u - M C^T$		
$P^T C = 0$	ou	$C^T P = 0$
$M^T C = u$	ou	$C^T M = u$

Exemple de calcul de matrices d'incidences.



(E)

	x_1	x_2	x_3
u_1	-1		
u_2	1	-1	
u_3		-1	1
u_4	-1		1

(P)

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	1	1
u_2		-1	-1
u_3			1
u_4			

(C)

	u_4
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	1

(M)

	u_i
u_1	
u_2	1
u_3	-1
u_4	1

Toutes les propriétés ci-dessus sont bien vérifiées.

Chapitre III

DETERMINATION D'UN PROGRAMME DE TRANSPORT ENTRE n SOURCES ET 3 ARRIVEES

① Hypothèses -

Nous supposerons connus :

- les quantités t_i disponibles aux sources T_i $\quad i \in (1, 2, \ldots, n)$
- les quantités q_j exigées aux arrivées Q_j $\quad j \in (1, 2, 3,)$
- la matrice C des coûts de transport unitaires c_{ij}.

Le programme de transport s'écrit alors, si r_{ij} est quantité transportée sur la branche $T_i Q_j$.

$$\Sigma_j r_{ij} = t_i \qquad i \ (1, 2, \ldots, n)$$

$$\Sigma_i r_{ij} = q_j \qquad j \ (1, 2, 3)$$

$$\Sigma_i t_i = \Sigma_j q_j = T$$

$$r_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } f = \Sigma_i \Sigma_j c_{ij} r_{ij}$$

.../...

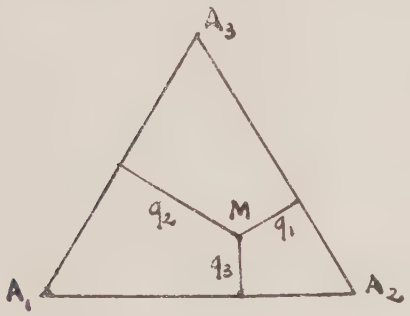
② Diagramme triangulaire equilatéral -

Considérons un ensemble $M(q_1, q_2, q_3)$ tel que $q_1+q_2+q_3=T$. On peut représenter géométriquement cet ensemble par un point du diagramme triangulaire équilatéral - on abrégé "triangle équilatéral" - $A_1A_2A_3$ (T = longueur des médianes).

Les distances de M aux côtés A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 sont respectivement q_1, q_2, q_3.

Réciproquement à tout point M du diagramme on peut faire correspondre un ensemble de valeurs q_1, q_2, $q_3 \geq 0$ telles que $q_1 + q_2 + q_3 = T$.

On définit ainsi une correspondance biunioque entre M et $(q_1 q_2 q_3)$



Remarque : Il est immédiat de calculer les coûts de transport relatifs aux ensembles $q_1q_2q_3$ représentés par $A_1A_2A_3$.

③ Arbre associé -

Considérons M $[q_1q_2q_3]$ du diagramme $A_1A_2A_3$.

En général la résolution du programme de transport correspondant détermine de manière unique la valeur minimum de la fonction de coût f(M). A cette solution optimale réalisable correspond une base I et un arbre associé appartenant au graphe G (X U).

X ensemble des branches r_{ij}

U ensemble des sommets T_i et Q_j.

Cet arbre a(M) est unique et, dans le cas présent, a $\begin{cases} n+2 \text{ arêtes} \\ n+3 \text{ sommets.} \end{cases}$

(4) Réalisabilité :

Nous cherchons à quelles conditions doivent satisfaire q'_1, q'_2, q'_3 définissant M' appartenant au diagramme $A_1A_2A_3$, pour que l'arbre a(M') identique à l'arbre a(M), soit réalisable.

4-1 a(M) comporte soit n-1, soit n-2 sommets T_i pendants. Cette alternative est la seule possible car :

m = n sommets T_i pendants implique le non-connexité de l'arbre.

$m \leqslant n-3$ sommets T_i pendants implique l'existence de cycles dans l'arbre ce qui est contradictoire avec la définition de l'arbre.

4-2 Considérons le premier cas : n - 1 sommets T_i pendants.

L'existence d'un sommet T_i pendant signifie que la quantité t_i disponible en T_i est entièrement transportée vers un sommet Q_j particulier. C'est-à-dire qu'il est possible de décomposer l'ensemble des n-1 sommets T_i pendants en trois sous-ensembles disjoints k_1, k_2, k_3 tels que :

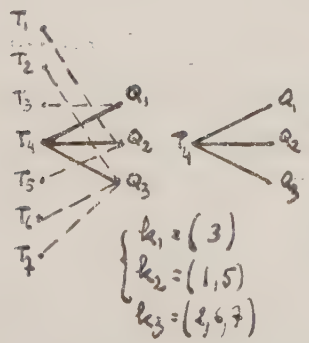
1 Si $i \in k_1, k_2, k_3$; t_i soit entièrement transporté vers Q_1 Q_2 Q_3.

Il apparaît une première série de conditions nécessaires :

1-1 $$Q_j \geqslant \sum t_i \quad i \in k_j \qquad \forall j \in (1, 2, 3)$$

Au point de vue géométrique, l'élimination progressive des arêtes adjacentes aux sommets pendants de l'arbre, correspond à restreindre la portion du diagramme $A_1A_2A_3$ à l'intérieur duquel M' doit se trouver pour que a(M') soit réalisable.

Quand toutes ces arêtes ont été éliminées, on obtient un graphe partiel que nous appellerons graphe marginal associé à a(M).



Le graphe marginal correspond à la relation $T_o = q_1^* + q_2^* + q_3^*$ et permet de définir la zone unitaire dans laquelle M et M' se trouvent : triangle équilatéral unitaire (hauteur t_o) $\Delta(M)$

De plus cette zone unitaire est positionnée par les conditions précédentes à l'intérieur du diagramme $A_1A_2A_3$.

.../...

Réciproquement à tout point M' appartenant à la zone unitaire Δ (M) correspond la relation $t_o = q_1^* + q_2^* + q_3^*$ c'est-à-dire le graphe marginal associé à a(M).

Il suffit donc de remplir les conditions $q_j^* + Q_j = \sum t_i \quad i \in k_j$

$\forall j \in (1\ 2\ 3)$

c'est-à-dire d'ajouter au graphe marginal les arêtes associées aux sommets T_i pendants pour que le point M' rende l'arbre a(M') réalisable.

Théorème : La condition nécessaire et suffisante pour que M' et M correspondent au même arbre a(M) est que M et M' appartiennent à la même zone unitaire triangle du diagramme $A_1A_2A_3$.

La zone est définie par les conditions

$$q_j \geq \sum t_i \quad i \in k_j \quad \forall j \in (1\ 2\ 3)$$

$$\sum q_j = \sum t_i + t_o \quad i \in U\, k$$

et l'arbre a(M) aura n - 1 sommets T_i pendants.

4-3 Soit le deuxième cas : n - 2 sommets T_i pendants.

De la même manière l'élimination des conditions immédiates

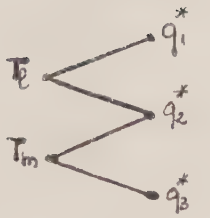
(11) $$Q_j \geq \sum t_i \quad i \in k_j \quad \forall j \in (1\ 2\ 3)$$

c'est-à-dire l'élimination des arêtes adjacentes aux sommets T_i pendants de l'arbre, conduit à un graphe partiel au graphe marginal associé à a(M).

Ce graphe marginal permet de définir la zone unitaire dans laquelle M et M' se trouvent : parallélogramme unitaire hauteurs (t_p, t_m).

En effet le graphe marginal à la structure suivante :

qui correspond aux équations



$$(12)\quad \begin{cases} \Sigma q^* = t_e + t_m \\ t_e \geqslant q_1^* \geqslant 0 \\ t_m \geqslant q_3^* \geqslant 0 \end{cases}$$

Dans le cas présent il faut préciser la structure particulière du graphe marginal. Cette structure permet de préciser la "forme" du parallélogramme qui, au demeurant, est positionné dans $A_1A_2A_3$ par le système (11).

Réciproquement à tout point M appartenant au parallélogramme (M) correspond le groupe de relations (12) qui définit le graphe marginal, auquel il suffit d'ajouter les arêtes adjacentes aux sommets pendants, c'est-à-dire le système de relations (11).

Théorème : La condition nécessaire et suffisante pour que les arbres a(M) et a(M') soient réalisables est que M et M' appartiennent à la même zone unitaire - parallélogramme - du diagramme $A_1A_2A_3$.

La zone est définie par les relations

$$q_j \geqslant \Sigma t_i \quad i \in k_j \qquad \forall j \in (1\ 2\ 3)$$

$$\Sigma q_j = \Sigma t_i + t_e + t_m \quad i \in Uk$$

et 2 relations supplémentaires

$$t_e + \Sigma t_i \geqslant q_{j_1} \quad i \in k\, j_1$$

$$t_m + \Sigma t_i \geqslant q_{j_2} \quad i \in k\, j_2$$

et l'arbre aura n - 2 sommets T_i pendants.

⑤ Optimalité -

Nous cherchons à quelles conditions un arbre a(M) correspond à la solution optimale du problème de transport relatif à M $q_1 q_2 q_3$.

Reprenons le problème de transport sous la forme matricielle :

Minimiser C x sous les conditions
$Ax = a$
$x \geq 0$

La méthode simpliciale donne comme solution en posant

I ensemble d'indices définissant une base

$\bar{I}$ ensemble d'indices définissant une non-base

$x_I = (A^I)^{-1} a$ variables de la base

$x_{\bar{I}} = 0$ variables n'appartenant pas à la base

$\delta = C^I (A^I)^{-1} A - C$ vecteur "critère de candidature"

avec

$X_I \geq 0$	critère de réalisabilité
$\delta^{\bar{I}} \leq 0$	critère d'optimalité
$\delta_I = 0$	

Au programme linéaire on associe le graphe G (UX) et à la base I on associe l'arbre a(M) ou a(I).

Signification graphique du critère d'optimalité.

La matrice A est la matrice E^T, transposée de la matrice d'incidence branches-étoiles du graphe G.

.../...

P est la matrice d'incidence branches-pistes relative à l'arbre a(I)

la relation $E^T P = u$ u matrice unité (cf chap II)

entraîne $\boxed{(A_I)^{-1} = P_I}$

En effet

$$A_I = E_I^T$$

et $$E^T P = \begin{pmatrix} E_I \\ E_{\bar{I}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_I \\ P_{\bar{I}} \end{pmatrix} = (E_I^T \; E_{\bar{I}}^T) \begin{pmatrix} P_I \\ P_{\bar{I}} \end{pmatrix} = u$$

or comme $P_{\bar{I}} = 0$ (propriété de la matrice br. pistes)

il vient $E_I^T P_I = u$ or A_I étant une matrice carrée

$$A_I^{-1} = P_I$$

D'autre part, la relation $PE^T = u - MC^T$ (cf chap II)

M étant la matrice branches-mailles
C étant la matrice branches-cordes
} associés au graphe G

entraîne $(A_I)^{-1} A = (u - MC^T)_I$

et en particulier

$$(A_I)^{-1} A^{\bar{I}} = (u - MC^T)_I^{\bar{I}}$$

comme $I \cap \bar{I} = \Phi$ et $C\bar{I} = u$

il vient $(A_I)^{-1} A^{\bar{I}} = - M_I$

le critère d'optimalité de la base I est donc

$$\boxed{C^I M_I + C^{\bar{I}} \geqslant 0}$$

.../...

c'est-à-dire que

> Théorème : La condition pour qu'un arbre a(M) soit optimal est que la somme algébrique des coûts de transport le long de chaque maille de base soit positive ou nulle.

⑥ Optimalité et réalisabilité -

1) Un théorème des programmes linéaires dit que la fonction de coût est "linéaire" "par morceaux" par rapport au second membre de l'équation matricielle

$$Ax = a$$

Dans le cas présent étant donné $t_i = cte \quad \forall i \in (1\ 2\ \ldots n)$

$$\Sigma q = \Sigma t$$

on peut dire - par extension - que la fonction de coût

$$g = \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \gamma_3 q_3 + cte$$

est "linéaire" à coefficients γ constants par zone.

2) D'autre part la condition d'optimalité d'un arbre est indépendante du 2ème membre, en l'occurence le point M $(q_1 q_2 q_3)$.

3) Par conséquent si un arbre est réalisable et optimal en un point M, cet arbre est optimal quelquesoit M' appartenant à la zone unitaire (M) tel que l'arbre a(M') est réalisable.

4) En conclusion, si $g = \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \gamma_3 q_3 + cte$ est la valeur minimum de la fonction de coût relative à l'ensemble M, pour tout ensemble M' appartenant à (M) la valeur minimum de la fonction de coût sera

$$g = \gamma_1 q'_1 + \gamma_2 q'_2 + \gamma_3 q'_3 + cte \quad (\text{cte identique}) \ .$$

.../...

⑦ Analyse de la fonction de coût -

Considérons M (q_1, q_2, q_3) et l'arbre optimal a(M), caractérisant la zone $\Delta(M)$.

Si M' appartient à la zone $\Delta(M)$, a(M') et a(M) sont identiques. Les variations des quantités transportées sont supportées uniquement par les arêtes du graphe marginal associé à M.

Les variations de la fonction optimale de coût sont donc dues aux transports sur ces arêtes.

1 L'arbre a(M) a n-1 sommets T_i pendants.

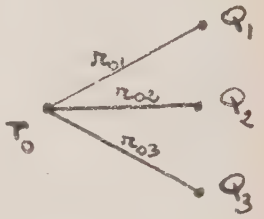
Le graphe marginal a la structure suivante correspondant à une zone $\Delta(M)$ triangle unitaire, et correspondant aux coûts unitaires C_{01}, C_{02}, C_{03}.

Donc si M $q_1 q_2 q_3$ et M' q'_1 q'_2 q'_3 sont tels que

$$q_1 = q'_1 + \Delta q_1$$

$$q_2 = q'_2 + \Delta q_2 \qquad \Sigma_j \Delta q_j = 0 \qquad j \in (1\ 2\ 3)$$

$$q_3 = q'_3 + \Delta q_3$$



La variation de la fonction optimale de coût est entre M et M'

$$\boxed{\delta C(M) = C_{01}\Delta q_1 + C_{02}\Delta q_2 + C_{03}\Delta q_3}$$

et si r_{01}, r_{02}, r_{03} sont les quantités transportées de T_0 vers $Q_1 Q_2 Q_3$ le coût optimal de transport relatif à M appartenant au triangle unitaire T_0 est :

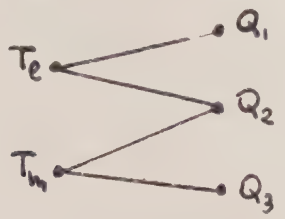
$$\boxed{C(M) = \sum_j C_{0j} r_{0j} + \sum_j \sum_i C_{ij}\, t_i \qquad \begin{matrix} i \in k_j \\ j \in (1\,2\,3) \end{matrix}}$$

$$\text{avec} \quad \sum_j r_{0j} = t_0$$

.../...

2 L'arbre a(M) a n-2 sommets T_i pendants.

Le graphe marginal a la structure suivante, correspondant aux couts unitaires



$$\begin{cases} c_{\ell 1},\ c_{\ell 2} \\ c_{m1},\ c_{m2} \end{cases}$$

La variation de la fonction optimale du coût entre M et M' est :

$$\delta C(M) = \left(c_{\ell 1} - c_{\ell 2}\right) \Delta q_1 + \left(c_{m3} - c_{m2}\right) \Delta q_3$$

et le coût optimal en M appartenant au parallélogramme unitaire T_ℓ, T_m

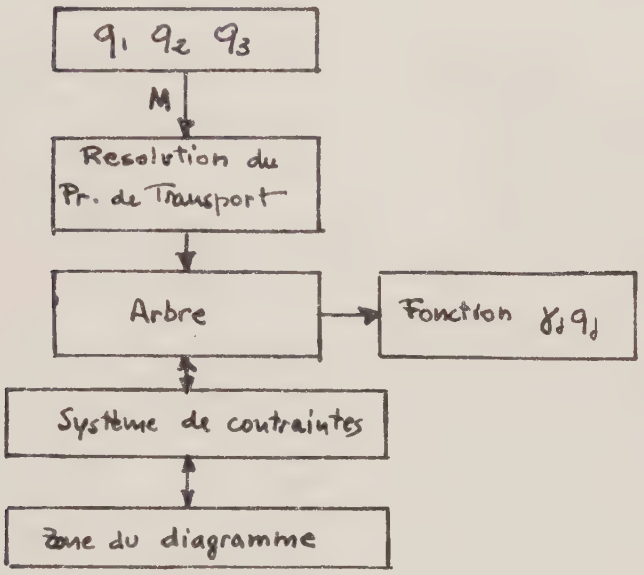
$$C(M) = c_{\ell 1}\, r_{\ell 1} + c_{\ell 2}\, r_{\ell 2} + c_{m2}\, r_{m2} + c_{m3}\, r_{m3} + \sum_i \sum_j c_{ij}\, t_i$$

$$i \in k_j \qquad j \in (1\ 2\ 3)$$

avec $r_{\ell 1} + r_{\ell 2} = t_\ell$

$$r_{m2} + r_{m3} = t_m$$

Nous pouvons maintenant écrire l'organigramme suivant :



Remarque : Dans le cas où M' est pris sur le contour de la zone $\Delta(M)$ l'arbre $a'(M')$ est identique à $a(M)$ moins une arête.

On peut aussi considérer M' comme appartenant à la zone Δ' adjacente à $\Delta(M)$ le long du contour sur lequel se trouve M'.

L'arbre $a'(\Delta')$ relatif à cette zone est identique à $a(M)$ à une arête près.

Conclusion :

On peut décomposer le diagramme $A_1A_2A_3$ en un certain nombre N de zones unitaires. Ces zones auront au maximum un côté en commun.
Si nous pouvons déterminer à priori le nombre N et l'emplacement relatif de ces zones, il suffira de placer un point M $(q_1q_2q_3)$ dans le diagramme $A_1A_2A_3$ pour connaître l'arbre $a(M)$ correspondant.

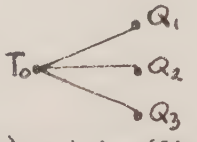
Chapitre IV

ETUDE DETAILLEE DU DIAGRAMME $A_1A_2A_3$

DETERMINATION DU NOMBRE N DES ZONES UNITAIRES

① **L'arbre a(M) a n-1 sommets T_i pendants.**

Soit T_0 le sommet non pendant.



a) La détermination du graphe marginal $g(T_0)$ est immédiate et unique.

b) Pour construire a(M), il reste à déterminer n-1 arêtes issues des n-1 sommets T_i pendants.

Soit $T_i \neq T_0$ l'un de ces sommets, et l'arête $T_i\ Q_k$ $k \in 1\ 2\ 3$

Pour que cette arête appartienne à a(M) il faut et il suffit que le long de toute maille

$j \in (1\ 2\ 3) \neq k$

la somme des coûts unitaires $C_{ik} - C_{0k} + C_{0j} - C_{ij} \geqslant 0$

C'est-à-dire que, si $C_{ij} - C_{0j} = \Delta_i^j$, il suffit de choisir parmi les Δ_i^j, celui qui est supérieur à tous les autres : Δ_i^k.

Ce choix est toujours possible et permet de déterminer l'arête T_iQ_k.

c) Nous pouvons recommencer ce choix pour chaque sommet T_i pendant et énoncer, étant donné les conditions déjà étudiées sur les Q_j :

Théorème : Parmi tous les arbres du graphe G qui ont les mêmes n-1 sommets T_i pendants il en existe un qui est optimal et réalisable ; il lui correspond une zone unitaire triangulaire du diagramme $A_1A_2A_3$.

.../...

Il y a n manières de choisir T_0

Conclusion : Le diagramme $A_1A_2A_3$ comportera n zones unitaires, triangles équilatéraux (hauteur t_i $i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$), correspondant aux arbres optimaux réalisables ayant n-1 sommets T_i pendants.

Remarque : Dans certains cas particuliers il est possible de trouver 2 ou 3 Δ_i^k égaux entre eux, étant donné T_i ; on choisira arbitrairement l'un quelconque d'entre eux et l'arête $T_i\ \Omega_k$ correspondante.

② L'arbre a(M) a n-2 sommets T_i pendants -

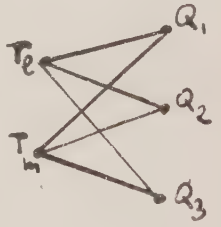
Soit T_ℓ et T_m les sommets non-pendants.

a) Détermination du graphe marginal -

Considérons les cinq sommets T_ℓ , T_m, Ω_1 Ω_2 Ω_3 et un arbre partiel construit sur ces sommets. Nous définissons ainsi 2 mailles de base et les sommes algébriques des coûts unitaires le long de ces mailles sont

$$C_{\ell 1} - C_{m1} + C_{m2} - C_{\ell 2}$$

$$\text{et} \quad C_{\ell 3} - C_{m3} + C_{m1} - C_{\ell 1}$$



et si on appelle $\Delta^k = C_{\ell k} - C_{mk}$

pour que l'arbre partiel soit le graphe marginal il faut que

$$① \quad \begin{cases} \Delta^1 - \Delta^2 \geqslant 0 \\ \Delta^3 - \Delta^1 \geqslant 0 \\ \Delta^3 - \Delta^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Nous tirons les conséquences suivantes :

- Parmi les arbres partiels construits sur les 5 sommets, il n'en existe qu'un qui soit le graphe marginal, c'est-à-dire qui permette de vérifier le système (1). Le cas où différents Δ^k sont égaux entre eux doit être exclu si l'on a préalablement déterminé les zones triangulaires, et par conséquent dans ce cas particulier donné la préférence à un Δ^k précis.

.../...

- Pour obtenir la solution optimale il suffit de classer les Δk par ordre croissant et de choisir les 2 plus grands Δ^k, ce qui détermine les mailles correspondantes.

b) Détermination des autres n-2 arêtes de l'arbre a(M)

Ces arêtes correspondent aux n-2 sommets T_i pendants et l'étude correspondante a déjà été faite.

c) Etant donné les conditions sur les Q_j cf Réalisabilité nous pourrons enoncer

Théorème : Parmi tous les arbres du graphe G qui ont les mêmes n-2 sommets T_i pendants, il en existe un et un seul qui est optimal et réalisable. Il lui correspond une zone unitaire parallélogramme du diagramme $A_1A_2A_3$.

Il y a C_n^2 manières de choisir les 2 sommets non-pendants $T_\ell T_m$/

Conclusion :
Le diagramme $A_1A_2A_3$ comportera C_n^2 zones unitaires, parallélogrammes hauteurs t_ℓ et t_m, correspondant aux arbres optimaux réalisables ayant n-2 sommets T_i pendants. Les côtés des parallélogrammes sont parallèles aux côtés de $A_1A_2A_3$.

Le diagramme $A_1A_2A_3$ est donc décomposé en

$$N = n + C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2} \text{ zones unitaires.}$$

.../...

DETERMINATION DE L'EMPLACEMENT DES ZONES UNITAIRES

Nous connaissons maintenant le nombre, la forme et les dimensions des zones unitaires. Comment sont-elles distribuées dans le diagramme $A_1A_2A_3$?

① Notion de couloir -

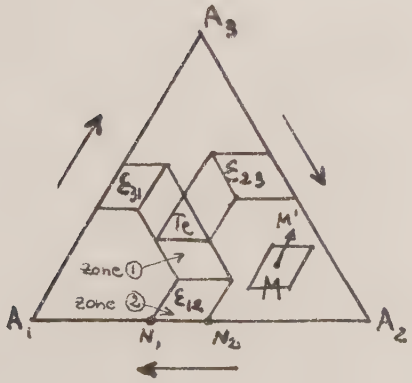
Considérons le sommet T_ℓ , le triangle unitaire associé au graphe marginal T_ℓ (Ω_1, Ω_2, Ω_3) , l'ensemble $\mathcal{E}(T_\ell)$ des n-1 parallélogrammes associés aux graphes marginaux semblables à T_ℓ (Ω_1, Ω_2) T_i (Ω_2, Ω_3) $i \in (1\ 2\ \ldots n)$ $i \neq \ell$

$\mathcal{E}(T_\ell)$ se décompose en 3 sous-ensembles disjoints $\mathcal{E}_{12}$, $\mathcal{E}_{23}$, $\mathcal{E}_{31}$

$\mathcal{E}_{j,j+1}$ $\forall j \in (1\,2\,3)$ est l'ensemble des parallélogrammes associés aux graphes marginaux possédant les arêtes T_ℓ (Ω_j, Ω_{j+1})

Si nous appelons couloir la configuration géométrique c'est-à-dire l'ensemble des parallélogrammes ayant deux à deux un côté commun parallèle à une direction donnée.

$\mathcal{E}_{12}$, $\mathcal{E}_{23}$, $\mathcal{E}_{31}$ constituent 3 couloirs issus du triangle T_ℓ

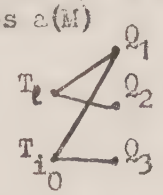
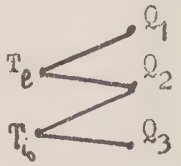


En effet considérons le point M $q_1q_2q_3$ appartenant au triangle unitaire T associé à l'arbre a(M) dont le graphe marginal est T (Ω_1, Ω_2, Ω_3) ;

L'ensemble des n-1 sommets T_i pendants de a(M) est divisé en trois sous-ensembles disjoints k_1, k_2, k_3 tels que si $i\ k_j\ j$ $(1\ 2\ 3)$.

L'arête de a(M) adjacente à T_i est $T_i\ a_j$.

L'étude de la variation de a(M) correspondant au déplacement pas à pas de M de l'intérieur du triangle T_ℓ vers le côté A_1A_2 du diagramme $A_1A_2A_3$, montre que M traverse successivement des parallélogrammes ayant deux à deux un côté commun parallèle à A_1A_2 caractérisés par des arbres a(M)

tels que 1) le graphe marginal est soit  soit 

2) le sous-ensemble k_3 des indices i tel que

si $i \in k_3$ l'arête adjacente à T_i est T_1Q_3 a un élément de moins que l'ensemble k_3 précédent

3) que cet élément manquant dans k_3 est justement l'indice i_0 du sommet T_{i_0} appartenant au graphe marginal

4) l'ensemble k_3 de la dernière zone traversée est vide, ce qui signifie que cette zone a par côté un segment N_1N_2 de A_2A_1

5) le nombre de zones traversées est égal au nombre des éléments de l'ensemble k_3 relatif au triangle T_ℓ .

Remarques : 1 Nous pouvons faire la même étude en ce qui concerne le déplacement de M depuis le triangle T vers les côtés A_2A_3 et A_1A_3 du diagramme.

2 Il faut préciser que dans son cheminement, M doit réellement traverser les côtés parallèles à A_1A_2 des zones.

Exemple : Evolution de l'arbre a(M), les arêtes relatives à $T_1T_2T_3$ sont identiques d'une étape à l'autre.

.../...

② Considérons l'un des couloirs issus du triangle T_ℓ , par exemple $\mathcal{E}_{12}$.

Ce couloir rassemble tous les parallélogrammes associés aux graphes marginaux comportant les arêtes $T_\ell \Omega_1$, $T_\ell \Omega_2$.

Donc si M $(q_1 q_2 q_3)$ et M' $(q_1' q_2' q_3')$ appartiennent au couloir $\mathcal{E}_{12}$ et sont tels que $q_1 = q_1' + \Delta q_1$

$$q_2 = q_2' + \Delta q_2 \qquad \Delta q_1 = -\Delta q_2 = \Delta q$$

$$q_3 = q_3'$$

La variation du coût optimal entre M et M' est quelque soit q_3

$$\boxed{C(M) = (C_{\ell 1} - C_{\ell 2})\ \Delta q = \alpha_{12}^{\ell}\ \Delta q}$$

en posant $\alpha^{i}_{j-j+1} = C_{ij} - C_{i,j+1} \quad i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$

Cela est vrai en particulier si $q_3 = 0$, c'est-à-dire si M et M' appartiennent à l'intersection N_1N_2 du couloir $\mathcal{E}_{12}$ et du côté A_1A_2 du diagramme.

Il suffira donc, après avoir introduit un sens positif A_2 vers A_1, sur le côté A_1A_2, permettant de caractériser $\Delta q > 0$, de connaître l'emplacement du segment N_1N_2 sur A_1A_2 et α_{12}^{ℓ}, pour connaître la variation du coût optimal $\delta C(M)$ entre M et M' $(q_3 = q_3')$, si l'on sait déduire de N_1N_2 l'emplacement du couloir $\mathcal{E}_{12}$ auquel M et M' appartiennent.

Nous pouvons reprendre le même raisonnement pour les 2 autres couloirs à condition d'introduire les sens positifs $A_2 \to A_1$, $A_1 \to A_3$, $A_3 \to A_2$ } $\Delta q > 0$

.../...

③ Un parallélogramme associé au graphe marginal

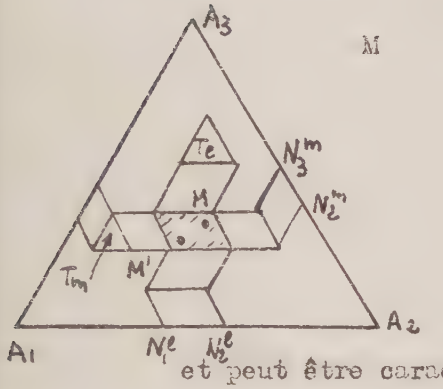
peut être considéré comme l'intersection des deux couloirs

$\mathcal{E}^{\ell}_{12}$ associé au sous-graphe

$\ell \neq m$

$\mathcal{E}^{m}_{23}$ associé au sous-graphe

Etant donné les conventions de sens précisées plus haut, la variation de coût optimal entre M et M' appartenant au parallélogramme est si



$$M \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{cases} \qquad M' \begin{cases} q_1 + \Delta q \\ q_2 - \Delta q + \Delta q' \\ q_3 - \Delta q' \end{cases}$$

$$\delta c(M) = \alpha^{\ell}_{12}\ \Delta q + \alpha^{m}_{23}\ \Delta q'$$

et peut être caractérisée par les emplacements sur A_1A_2 et A_2A_3 des segments $N_1N_2(\ell)$ et $N_2N_3(m)$.

④ Un triangle unitaire T_0 associé au graphe marginal

peut être considéré comme l'intersection des 2 couloirs

$\mathcal{E}^{0}_{12}$ associé au sous graphe

(par exemple)

$\mathcal{E}^{0}_{23}$ associé au sous graphe

(Il y a 3 combinaisons possibles).

$$\text{Si } M \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{cases} \qquad M' \begin{cases} q_1 + \Delta q \\ q_2 - \Delta q + \Delta q' \\ q_3 - \Delta q' \end{cases}$$

$$\delta c(M) = \alpha^{0}_{12}\ \Delta q + \alpha^{0}_{23}\ \Delta q'$$

.../...

et comme $\alpha^{0}_{ij} = C_{0i} - C_{0j}$

en posant $\Delta q = \Delta q_1$, $\Delta q' - \Delta q = \Delta q_2$, $-\Delta q' = \Delta q_3$

nous retrouvons bien la formule

$$\boxed{\delta C(M) = C_{01}\,\Delta q_1 + C_{02}\,\Delta q_2 + C_{03}\,\Delta q_3} \qquad \Sigma \Delta q = 0$$

⑤ Etude des emplacements relatifs des segments $(N_1N_2)_i$ sur le côté A_1A_2 du diagramme

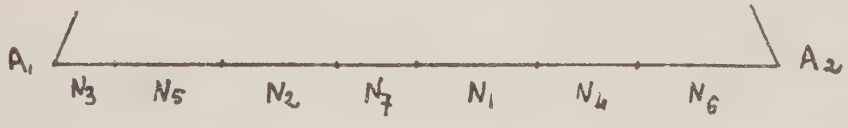
Chaque couloir $\mathcal{E}^{i}_{12}$ découpe sur A_1A_2 un segment $(N_1N_2)_i$

On a les relations suivantes :

$$(N_1N_2)_i \cap (N_1N_2)_j = \Phi$$

$$\cup (N_1N_2)_i = A_1A_2 \qquad i, j \in (1\ 2\ \ldots n)$$

Considérons une décomposition particulière de A_1A_2, et la succession des segments $(N_1N_2)_i$, que nous appelerons N_i pour simplifier l'écriture dans un cheminement de A_2 vers A_1 ; soit par exemple pour n = 7.



Dans ce cheminement le point courant M $(q_1, q_2, 0)$ est situé

dans le segment	ou la variation unitaire de coût est :
N_6	α^{6}_{12} -
N_4	α^{4}_{12}
N_1	α^{1}_{12}
N_7	α^{7}_{12}
N_2	α^{2}_{12}
N_5	α^{5}_{12}
N_3	α^{3}_{12}

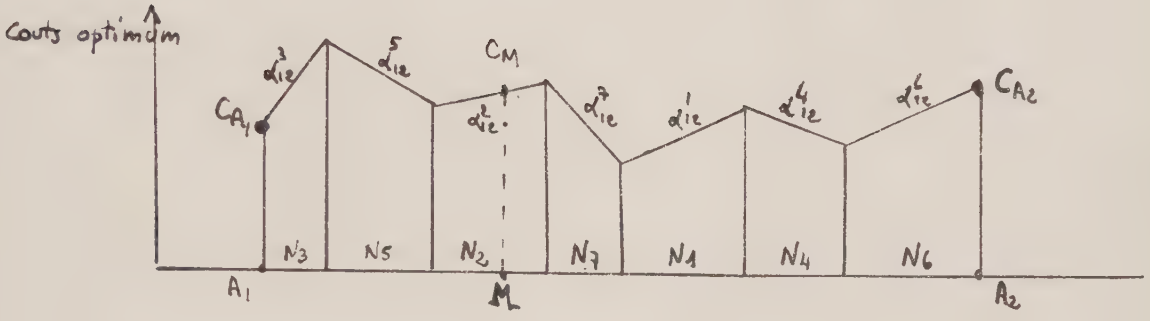
.../...

Les coûts optimaux des transports relatifs à A_1 et A_2, sommets du diagramme, sont :

$$C_{A1} = \Sigma_i \, C_{i1} \, t_i$$

$$C_{A2} = \Sigma_i \, C_{i2} \, t_i \qquad i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

A cette décomposition arbitraire de A_1A_2 on peut faire correspondre un graphique donnant les coûts optimum en fonction du cheminement de M coûts optimum.



Il y a n! manières possibles de décomposer A_1A_2.

C_{A1} et C_{A2} étant des valeurs indépendantes de cette décomposition, pour que C_M soit optimum réellement quel que soit M sur A_1A_2, il faut choisir la décomposition de A_1A_2 en n segments N_i, telle que le graphique représentant C_M en fonction de la position de M sur A_1A_2, soit <u>l'enveloppe inférieure de toutes les lignes brisées possibles</u>.

Choisir cette enveloppe revient à décomposer A_1A_2, de A_2 vers A_1, en segments N_i associés aux α^i_{12} classés dans l'ordre croissant, du plus négatif au plus positif.

<u>Remarque</u> :1) Cette décomposition est unique si les α^i_{12} sont tous différents. Si 2 ou plusieurs α^i_{12} sont égaux on leur donnera un ordre arbitraire.

2) Cette étude est valable identiquement pour la décomposition des côtés A_2A_3 et A_3A_1 du diagramme.

.../...

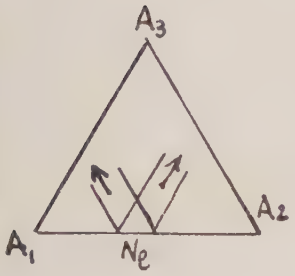
RECHERCHE DE LA POSITION DE TOUTES LES ZONES

A PARTIR DE LA DECOMPOSITION DES COTES DU DIAGRAMME $A_1A_2A_3$

(1) Zones de 1ère espèce.

Considérons un segment N_i appartenant au côté A_1A_2 du diagramme. N_i est l'intersection d'un certain couloir $\mathcal{E}_{12}^{i}$ et de A_1A_2.

L'arrivée de ce couloir peut se faire parallèlement soit à A_1A_3, soit à A_2A_3.



Si le segment N_ℓ est placé à une extrémité de la décomposition, l'arrivée de $\mathcal{E}_{12}^{\ell}$ ne peut plus se faire que d'une seule manière.

- Supposons par exemple que $N_\ell = (N_1N_2)_\ell$ est le premier segment de la décomposition de A_1A_2 : (N_2 et A_2 confondus).

Le couloir $\mathcal{E}_{12}^{i}$ s'enfoncera dans le diagramme parallélement à A_2A_3.

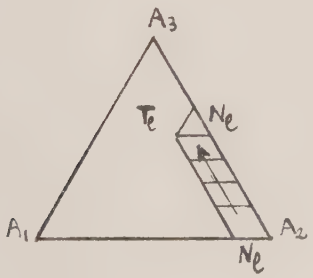
Si h est le nombre de segments découpés sur A_2A_3, de A_2 vers A_3, tel que pour chaque segment $(N_2N_3)_j$, $j \neq \ell \in (1\ 2\ \ldots\ n)$ nous déterminons immédiatement h parallélogrammes unitaires appartenant à $\mathcal{E}_{12}^{\ell}$.

Le $h+1^{ème}$ segment $(N_2N_3)_\ell$ permet de construire le triangle unitaire T_ℓ.

En considérant successivement tous les segments placés aux extrémités des décompositions (décompositions amputées des segments déjà utilisés) on peut donc déterminer un certain nombre N_1 de zones de manières très simple.

Nous appelerons ces zones : zones de 1ère espèce.

.../...



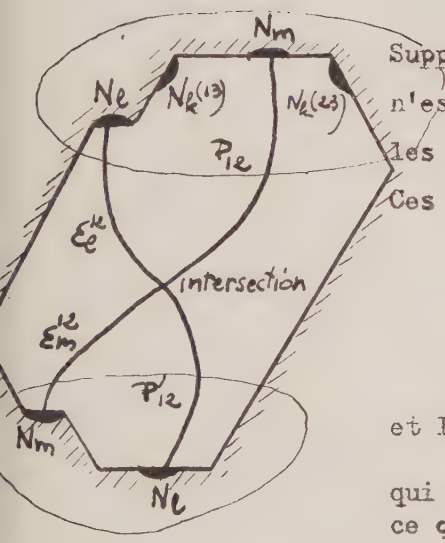
② Zones de 2ème espèce.

Les zones de 1ère espèce ayant été toutes déterminées ; il reste à l'intérieur du diagramme une surface limitée par un contour polygonal à angles obtus décomposé en segments N_i.

De chaque segment N_i peuvent être issus deux couloirs $\mathcal{E}^i_{12}$ par exemple; il s'agit de lever cette ambiguité.

Remarque préliminaire : considérons l'ensemble P des côtés du contour polygonal qui sont parallèles à l'un des côtés du diagramme (A_1A_2 par ex.) Cet ensemble est divisé en deux sous-ensembles P_{12} et P'_{12} "opposés" sur le contour. P_{12} et P'_{12} sont tels que si $M(q_1q_2q_3)$ appartient à $P_{12} \subset P$, $M'(q_1+\varepsilon\ ,\ q_2+\varepsilon\ ,\ q_3-2\varepsilon)$ appartient à Σ, si M appartient à $P'_{12} \subset P$, M'n'appartient pas à Σ.

Si les segments N et N_m appartiennent à l'un et l'autre sous-ensembles, la disposition de N et N_m sur chacun des sous-ensembles P_{12} et P'_{12} est la même.



Supposons en effet que cette disposition de N_ℓ par rapport à N_m n'est pas la même sur P_{12} et P'_{12}, il existe un couloir $\mathcal{E}^\ell_{12}$ joignant les deux segments N_ℓ, et un couloir joignant les deux segments N_m. Ces couloirs correspondent aux graphes partiels

et leur intersection correspond au graphe

qui est un cycle de l'arbre a(M) si M appartient à cette intersection ce qui est impossible.

Conséquence : Si $N_K(23)$ et $N_k(13)$ sont les premiers segments appartenant à A_2A_3 et à A_1A_3 et adjacents à P_{12}, la première zone appartenant au couloir $\mathcal{E}^m_{12}$ issu de N_m est soit le parallélogramme $N_mN_K(23)$ soit le parallélogramme $N_mN_k(13)$.

Détermination des zones de 2ème espèce.

Etant donnés le segment $N_m(12)$ appartenant à l'ensemble P_{12}, les segments $N_k(13)$ et $N_j(23)$ appartenant respectivement aux côtés $/\!/ A_1A_3$ et A_2A_3 du contour polygonal et adjacents à P_{12}, comment déterminer la 1ère zone du couloir $\mathcal{E}^m_{12}$ issu de N_m ?

.../...

1ère méthode. Soit M $(q_1 q_2 q_3)$ appartenant à N_m

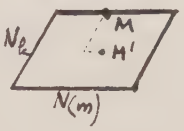
et M' $(q'_1\ q'_2\ q'_3)$ appartenant à l'intérieur du contour polygonal tels que

$$q'_1 = q_1 + \varepsilon$$
$$q'_2 = q_2 + \varepsilon$$
$$q'_3 = q_3 - 2\varepsilon$$

M et M' appartenant à la première zone du couloir $\mathcal{E}^m_{12}$.

Si cette zone était le parallélogramme $N_m N_k(13)$ associé au graphe marginal.

Soit



La variation du coût optimum serait

$$\delta C(M) = -\left(\alpha^m_{12} + 2\alpha^k_{31}\right)\varepsilon$$

Si cette zone était le parallélogramme $N_m N_j(23)$ associé au grapho marginal

Soit

La variation du coût optimum serait

$$\delta C(M) = \left(\alpha^m_{12} + 2\,\alpha^j_{23}\right)\varepsilon$$

La zone est déterminée par la plus négative de ces deux valeurs.

2ème méthode.

Soit $N_m(12)$ le segment extrême de P_{12}, par exemple adjacent à $N_j(23)$.

Nous considérons un programme de transport virtuel de T_m et T_j vers $Q_1 Q_2 Q_3$.

On construit alors un diagramme $a_1 a_2 a_3$, qui contiendra 3 zones unitaires de 1ère espèce.

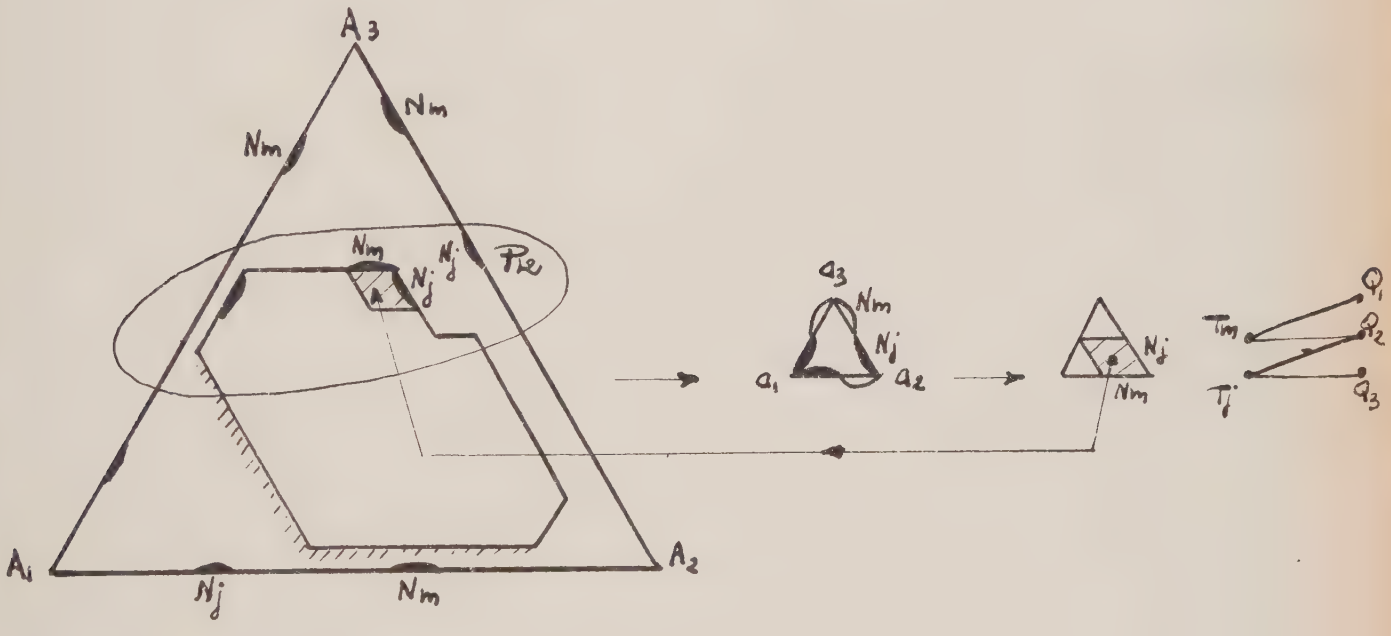
.../...

Pour construire ces zones il suffit de considérer comment sont découpés l'un par rapport à l'autre les segments N_m et N_j sur les côtés A_1A_2, A_2A_3 et A_3A_1 du diagramme $A_1A_2A_3$, puis de reporter cette répartition sur le diagramme $a_1a_2a_3$.

Si le parallélogramme ainsi déterminé sur $a_1a_2a_3$ correspond à l'arbre

La première zone du couloir $\mathcal{E}^m_{12}$ lui est semblable, et il est possible de la tracer immédiatement.

Sinon nous tracerons la zone correspondant à T_k.



Conclusion : Par l'une ou l'autre méthode, et de proche en proche, on peut maintenant déterminer toutes les zones de 2ème espèce.

.../...

Chapitre V

RECHERCHE DU PROGRAMME DE TRANSPORT RELATIF A UN ENSEMBLE M

M APPARTENANT AU DIAGRAMME $A_1A_2A_3$

La position de M est indépendante de la décomposition du diagramme.

① M appartient à un triangle unitaire T_0

a) le graphe marginal est évident

b) pour déterminer les n-1 arêtes de a(M) correspondant aux sommets pendants, il suffit de suivre successivement les 3 couloirs ε^0_{12}, ε^0_{23}, ε^0_{31} issus de T_0.

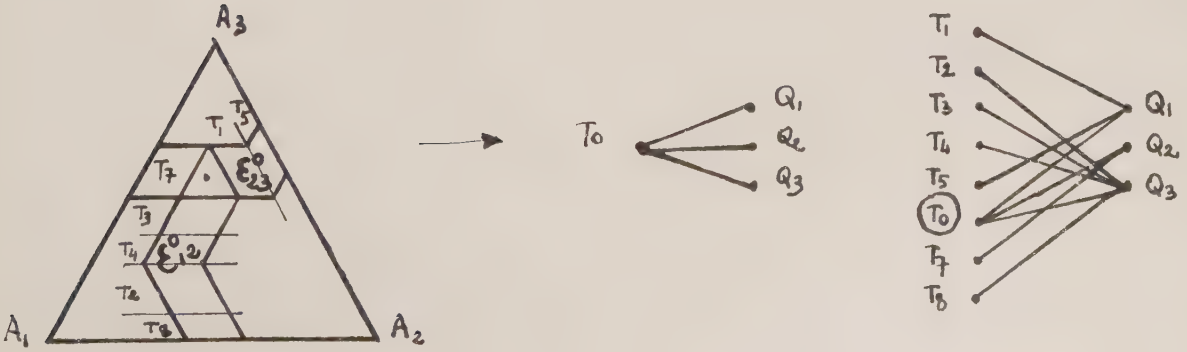
Le couloir ε^0_{12} coupe successivement les couloirs ε^j $j \in k_{12}$ chacun de ces couloirs correspond à un triangle T_j, donc à un sommet T_j de a(M), et à une arête T_jQ_3 de a(M).

Nous répétons l'opération pour les couloirs ε^0_{23}, et ε^0_{31}, qui coupent les couloirs ε^j $j \in k_{23}$ et $j \in k_{31}$.

les ensembles k_{12}, k_{23}, k_{31} sont disjoints

0 n'appartient à aucun ensemble

$$|k_{12} + k_{23} + k_{31}| = n-1$$



② M appartient à un parallélogramme $T\ T_m$

a) Le parallélogramme est l'intersection de deux couloirs ε^{ℓ} et ε^{m} qui définissent le graphe marginal associé

par exemple ε^{ℓ}_{12} et ε^{m}_{23}

b) pour déterminer les n-2 arêtes associées aux sommets T_i pendants, il suffit de suivre successivement, à partir du parallélogramme,

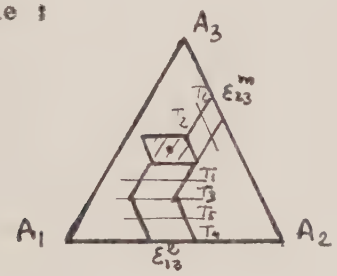
le couloir ε^{ℓ}_{12} jusqu'au côté A_1A_2 du diagramme

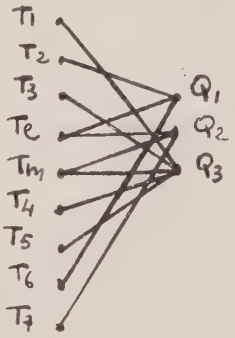
le couloir ε^{m}_{23} jusqu'au côté A_2A_3 du diagramme

et pour chaque couloir ε^{j} rencontré, de construire l'arête T_jQ_3 ou T_jQ_1 correspondante.

Les sommets T_i non utilisés seront joints au sommet Q_2 et le graphe final sera l'arbre a(M) cherché.

Exemple :





③ M appartient à un contour de zone.

On considère M comme appartenant à la zone et on supprime une arête de l'arbre a(M) déterminé.

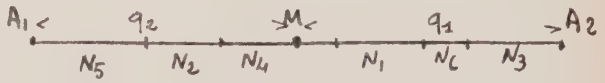
.../...

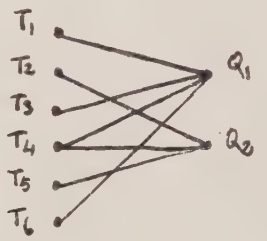
Remarques :

[1] L'étude relative à M appartenant à l'un des côtés du diagramme est aussi l'étude directe des problèmes de transport entre n sources et 2 arrivées.

Pour résoudre ce problème, nous calculerons tous les α^i_{12} relatifs aux segments N_i, nous découperons A_1A_2 en n segments N_i rangés dans l'ordre croissant de α^i_{12} de A_2 vers A_1 et ayant positionné M $(q_1 q_2)$ sur A_1A_2 on en déduira comme dans les cas précédents l'arbre a(M).

Exemple :

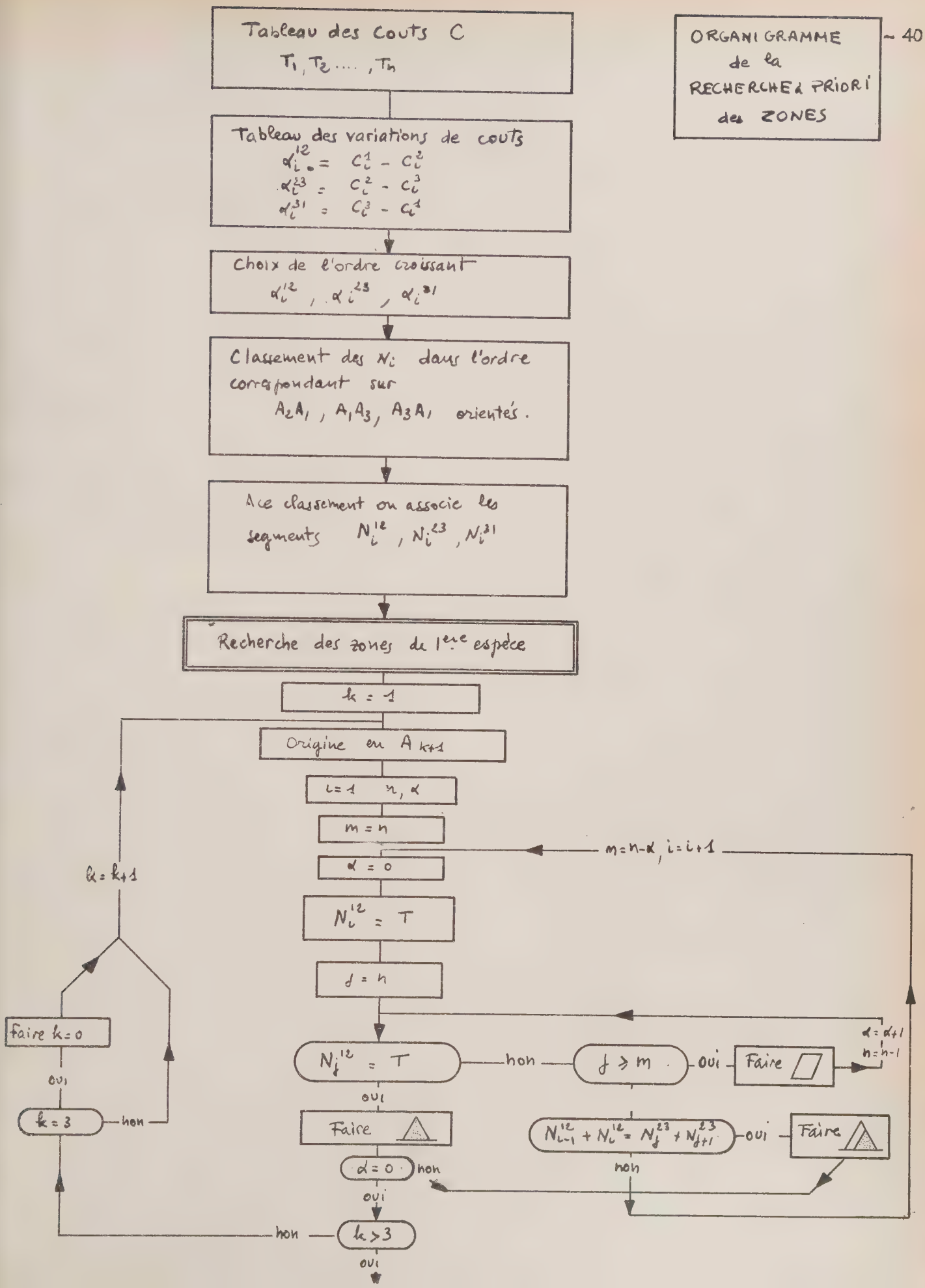


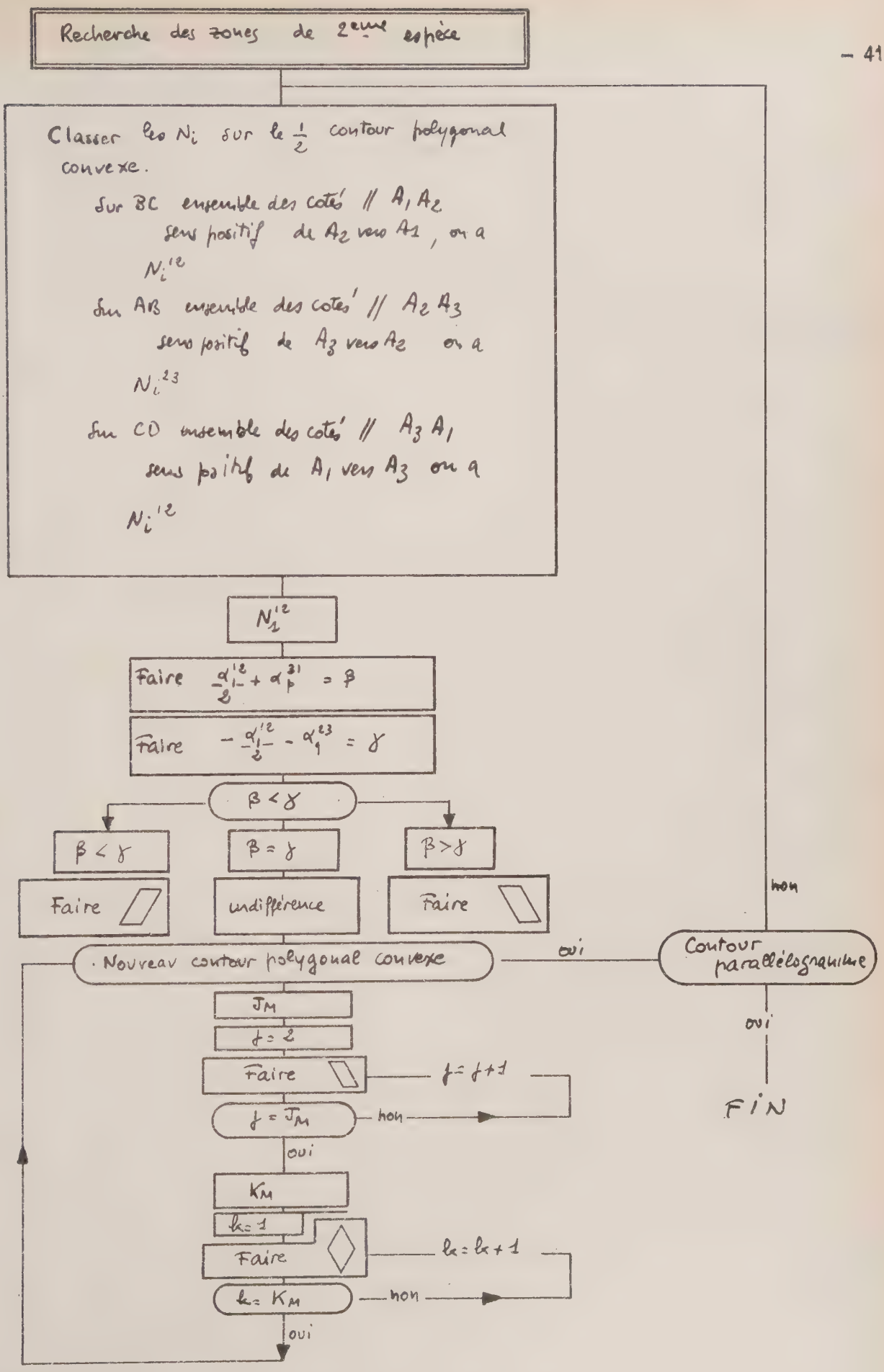


[2] Dans la décomposition pratique du diagramme $A_1A_2A_3$ il n'est pas nécessaire de déterminer avec précision la longueur des segments N_i. Il est même possible pour simplifier de considérer des segments N_i égaux entre eux.

.../...

ORGANIGRAMME de la RECHERCHE A PRIORI des ZONES




Recherche des zones de 2ème espèce
Classer les N_i sur le $\frac{1}{2}$ contour polygonal convexe.
Sur BC ensemble des cotés // A_1A_2 sens positif de A_2 vers A_1, on a N_i^{12}
Sur AB ensemble des cotés // A_2A_3 sens positif de A_3 vers A_2 on a N_i^{23}
Sur CD ensemble des cotés // A_3A_1 sens positif de A_1 vers A_3 on a N_i^{12}
N_1^{12}
Faire $-\frac{\alpha_1^{12}}{2} + \alpha_p^{31} = \beta$
Faire $-\frac{\alpha_1^{12}}{2} - \alpha_q^{23} = \gamma$
$\beta < \gamma$
$\beta < \gamma$
$\beta = \gamma$
$\beta > \gamma$
Faire
indifférence
Faire
Nouveau contour polygonal convexe
oui
Contour parallélogramme
non
oui
FIN
J_M
$f = 2$
Faire
$f = f+1$
$f = J_M$
non
oui
K_M
$k = 1$
Faire
$k = k+1$
$k = K_M$
non
oui

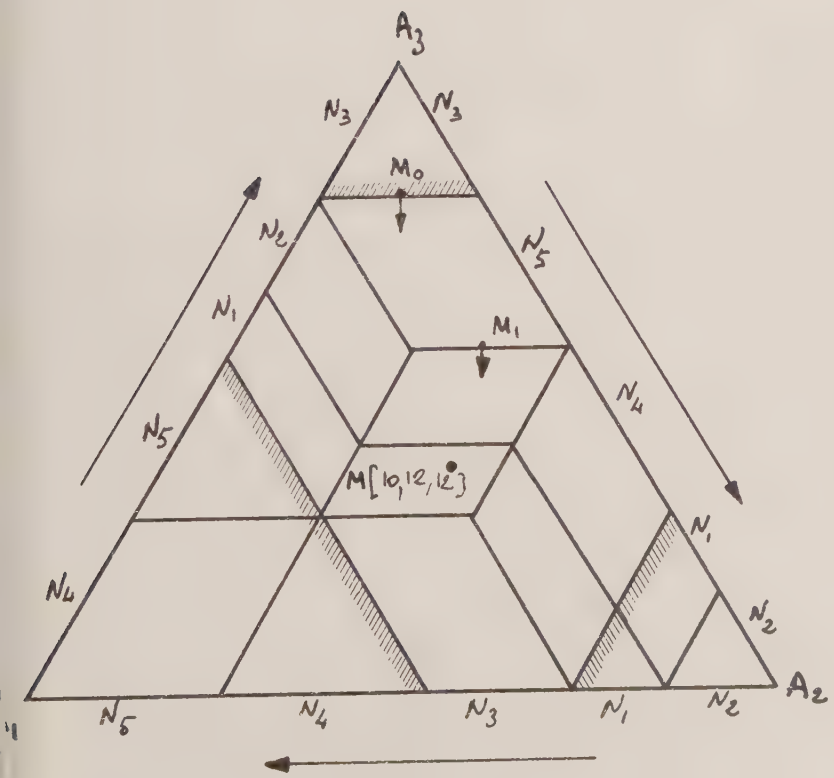
Soit le programme de transport $m \to 3$

4	1	2	6	9	$Q_1 = 10$
6	4	3	5	7	$Q_2 = 12$
5	2	6	4	8	$Q_3 = 12$
$T_1=4$	$T_2=5$	$T_3=7$	$T_4=9$	$T_5=9$	

-2	-3	-1	1	2	α^i_{12}
1	2	-3	1	-1	α^i_{23}
1	1	4	-2	-1	α^i_{31}
T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	

tableau des variations unitaires de couts

Classement des N_i par ordre croissant des α_i



α^i_{12} :	N_2, N_1, N_3, N_4, N_5
α^i_{23} :	N_3, N_5, N_4, N_1, N_2
α^i_{31} :	N_4, N_5, N_1, N_2, N_3

Détermination des zones de 2ème espèce.

en M_0

N_3 et N_5 ou	$\begin{cases} N_5 & \alpha^5_{23}\,\Delta q = -1 \\ N_3 & \alpha^3_{12}\,\frac{\Delta q}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$	$\Delta c = -\frac{3}{2}$
N_3 et N_2	$\begin{cases} N_2 & -\alpha^2_{31}\,\Delta q = -1 \\ N_3 & -\alpha^3_{12}\,\frac{\Delta q}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$	$\Delta c = -\frac{1}{2}$

On prend $N_3 \cdot N_5$

en M_1

N_3 et N_4 ou	$\begin{cases} N_4 & \alpha^4_{23}\,\Delta q = 1 \\ N_3 & \alpha^3_{12}\,\frac{\Delta q}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$	$\Delta c = \frac{1}{2}$
N_3 et N_2	déjà calculé	$\Delta c = -\frac{1}{2}$

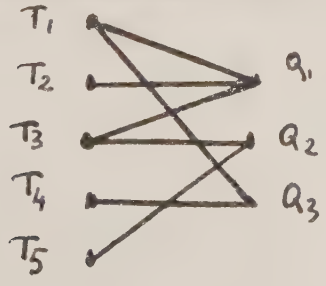
On prend $N_3 \cdot N_2$

en M_2

N_3 et N_4	déjà calculé	$\Delta c = \frac{1}{2}$
ou N_3 et N_1	$\begin{cases} N_3 & -\alpha^3_{12}\,\frac{\Delta q}{2} = \frac{1}{2} \\ N_1 & -\alpha^1_{31}\,\Delta q = -1 \end{cases}$	$\Delta c = -\frac{1}{2}$

On prend $N_3 \cdot N_1$

3 Recherche de la solution particulière M (10, 12, 12)



1	5	4			10
		3		9	12
3			9		12
4	5	7	9	9	

coût optimum = 140

cf : Kaufmann : méthodes et modèles de la recherche opérationnelle

n 57

Exemple n° 2

Soit le programme de transport n 3

10	20	5	9	10	$Q_1=9$
2	10	8	30	6	$Q_2=4$
1	20	7	10	4	$Q_3=8$

$T_1=3$ $T_2=5$ $T_3=4$ $T_4=6$ $T_5=3$

tableau des coûts possibles

8	10	-3	-21	4	α_i^{12}
1	-10	1	20	2	α_i^{23}
-9	0	2	1	-6	α_i^{31}
T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	

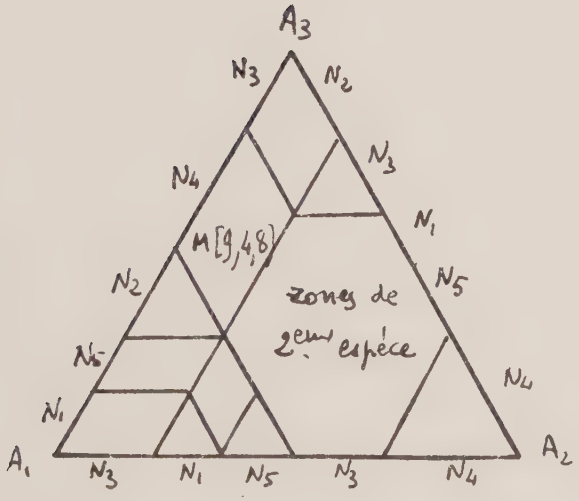
tableau des variations de coûts

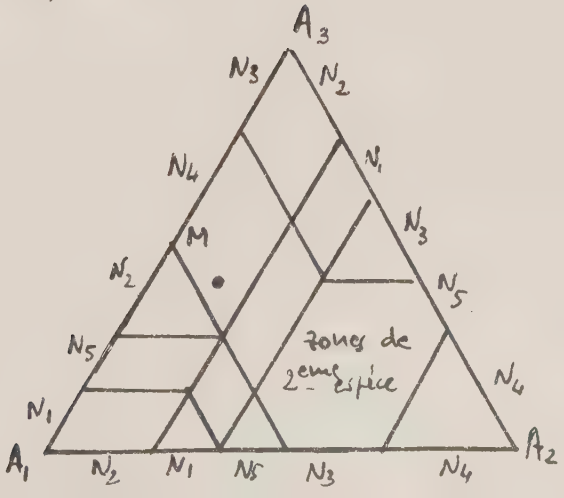
Recherche des zones de 1ère espèce :

On peut prendre comme classements

$$\alpha_{12}\ \alpha_{23}\ \alpha_{31}\quad \begin{cases} T_4, T_3, T_5, T_1, T_2 \\ T_2, T_3, T_1, T_5, T_4 \\ T_1, T_5, T_2, T_4, T_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} T_4, T_3, T_5, T_1, T_2 \\ T_2, T_1, T_3, T_5, T_4 \\ T_1, T_5, T_2, T_4, T_3 \end{cases}$$

donc les diagrammes.

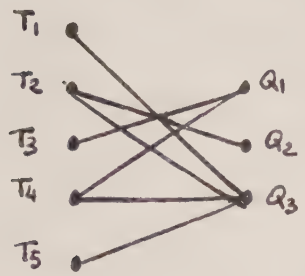




.../...

Dans le cas de l'exemple il n'est pas nécessaire de poursuivre la décomposition du diagramme plus loin puisque M (9,4,8) se trouve déjà dans les zones de 1ère espèce.

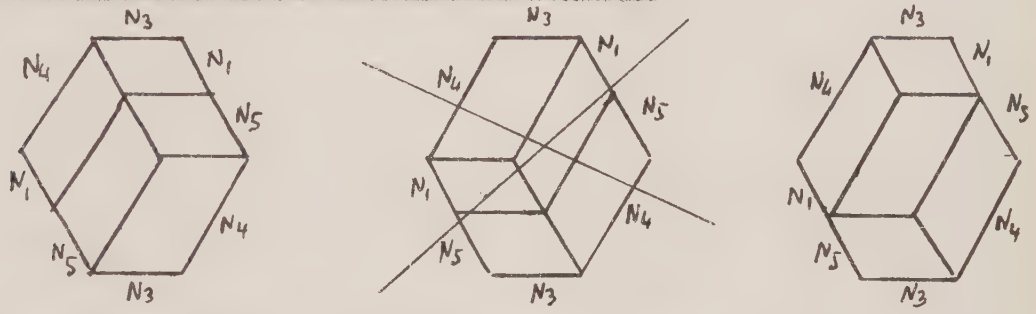
Solution particulière



		4	5		9
	4				4
3	1		1	3	8
3	5	4	6	3	

coût optimum = 150

Recherche des zones de 2ème espèce dans le 1er cas



A priori ces trois décompositions semblent possibles :

En réalité : un calcul montre que seules les deux décompositions extrêmes sont possibles.

Chapitre VI

APPLICATION A LA RESOLUTION DU PROBLEME INITIAL

[1] Considérons de nouveau le problème initial global d'optimisation de gestion et fixons à priori les quantités $q_{1_0} q_{2_0} q_{3_0}$ de combustible exigées par les trois centrales thermiques

étant donné la condition : $q_{1_0} + q_{2_0} + q_{3_0} = T$

Le problème global se décompose alors en deux problèmes partiels indépendants :

(1) le problème de transport des quantités t_i de combustible disponibles aux sources T_i vers les centrales thermiques Q_j.

(2) Le problème de l'utilisation par ces centrales du combustible pour satisfaire la demande d'énergie W, étant donné les contraintes précisées dans l'introduction.

Le problème de transport correspond au système linéaire.

$$\sum_j r_{ij} = t_i \qquad i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

$$\sum_i r_{ij} = q_{j_0} \qquad j \in (1\ 2\ 3)$$

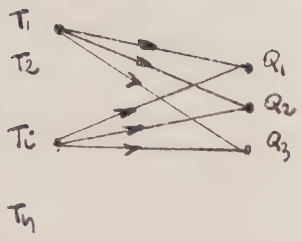
$$\sum_i t_i = \sum_j q_{j_0} = T$$

$$r_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } F = \sum_i \sum_j c_{ij}\, r_{ij}$$

associé au graphe et au tableau matriciel suivants :

.../...

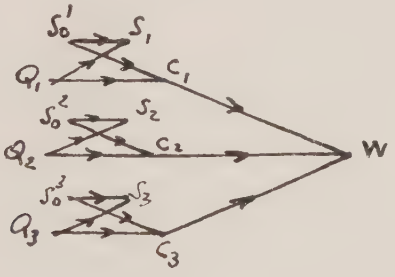


$x_{11}x_{12}x_{13}$	$x_{21}x_{22}x_{23}$	.....	$x_{h1}x_{h2}x_{h3}$	
1 1 1				T_1
	1 1 1			T_2
			1 1 1	T_h
1	1	1	1	Q_1
1	1	1	1	Q_2
1	1	1	1	Q_3
C_{11} C_{12} C_{13}	C_{21} C_{22} C_{23}		C_{h1} C_{h2} C_{h3}	Min F

A $M_0 \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ situé dans le diagramme $A_1A_2A_3$.

Nous pouvons faire correspondre un arbre a(M) associé à la solution optimale du transport relatif à M_0 soit un coût $f(M_0)$.

D'autre part, le problème de production correspond à un système linéaire associé au graphe



dont la résolution optimale nous donne un coût de production $g(M_0)$. Le coût total du problème global associé à M_0 est alors

$$H(M_0) = g(M_0) + F(H_0) \text{ et il est minimum.}$$

[2] Amélioration de cette solution.

Est-il possible de trouver $M \neq M_0$ tel que H(M) soit préférable à $H(M_0)$? L'étude faite dans les chapitres précédents montre qu'on peut définir une zone $\Delta(M_0)$ autour de M_0 appartenant au diagramme $A_1A_2A_3$ telle que

les arbres a(M) et $a(M_0)$ soient identiques, il existe une fonction de coût linéaire à coefficients constants $\sum \gamma_j q_j$.

.../...

Nous chercherons tout d'abord à résoudre le problème suivant :

> Trouver $M \neq M_0$ appartenant à la zone $\Delta(M_0)$ du diagramme $A_1A_2A_3$
>
> tels que $H(M)$ soit inférieur $H(M_0)$

En M_0 le coût de transport optimal $f(M_0)$ est

$$f(M_0) = \gamma_1 q_1^0 + \gamma_2 q_2^0 + \gamma_3 q_3^0 + f_0$$

et le coût total $H(M_0)$ optimal est

$$H(M_0) = g(M_0) + f(M_0)$$

En M le coût de transport optimal f(M) sera

$$f(M) = \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \gamma_3 q_3 + f_0$$

et le coût total

$$H(M) = g(M) + \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \gamma_3 q_3 + f_0$$

Résoudre ce problème c'est en réalité le système linéaire suivant

$$\eta_1 C_1 + \eta_2 C_2 + \eta_3 C_3 = W$$

$$S_j \geq \sigma_j \qquad j \in (1\,2\,3)$$

$$C_j + S_j - q_j = S_j^0$$

$$\Sigma q_j = T$$

$$C_j,\ q_j,\ S_j \geq 0$$

q_j soumis aux contraintes définissant la zone $\Delta(M_0)$

que nous noterons q_j / s_j

$$\text{Min } H'(M) = H(M) - f_0$$

où s_j, C_j, q_j sont les inconnues du problème.

.../...

C_1	C_2	C_3	S_1	S_2	S_3	q_1	q_2	q_3	
η_1	η_2	η_3							W
			1						$\geq \sigma_1$
				1					$\geq \sigma_2$
					1				$\geq \sigma_3$
						1	1	1	T
						1			$/a_1$
							1		$/a_2$
								1	$/a_3$
1			1			-1			S_1^0
	1			1			-1		S_2^0
		1			1			-1	S_3^0
β_1	β_2	β_3	δ_1	δ_2	δ_3	γ_1	γ_2	γ_3	Min g'(M)

La résolution de ce programme linéaire détermine C_j, S_j et q_j correspondant à g(M) optimal. $M(q_j)$ peut être à l'intérieur ou sur la frontière de $\Delta(M_0)$.

Si M est sur la frontière de $\Delta(M_0)$ nous considérons la nouvelle zone adjacente à $\Delta(M_0)$ ayant cette frontière en commun avec elle.

A cette nouvelle zone - tout à fait déterminée à priori sur le diagramme $A_1A_2A_3$ - nous associons un nouvel arbre a'(M) et une nouvelle fonction de coût $\sum_j \gamma'_j q_j$. Si nous appelons Δ' cette nouvelle zone, nous étudierons alors le nouveau problème,

"trouver $M' \neq M$ appartenant à la zone Δ' du diagramme $A_1A_2A_3$, tel que H(M') soit inférieur à H(M)"

dont la résolution est semblable à la résolution précédente.

Si M est à l'intérieur de la zone $\Delta(M_0)$ -

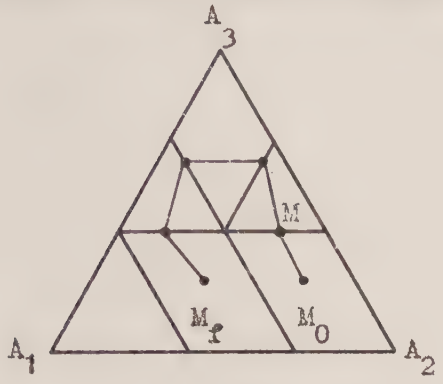
La solution trouvée correspond à la solution optimale du problème global.

Remarques : Le processus itératif qui apparait est un processus convergent car le nombre d'étapes possibles est lié au nombre N des zones possibles; donc il est limité.

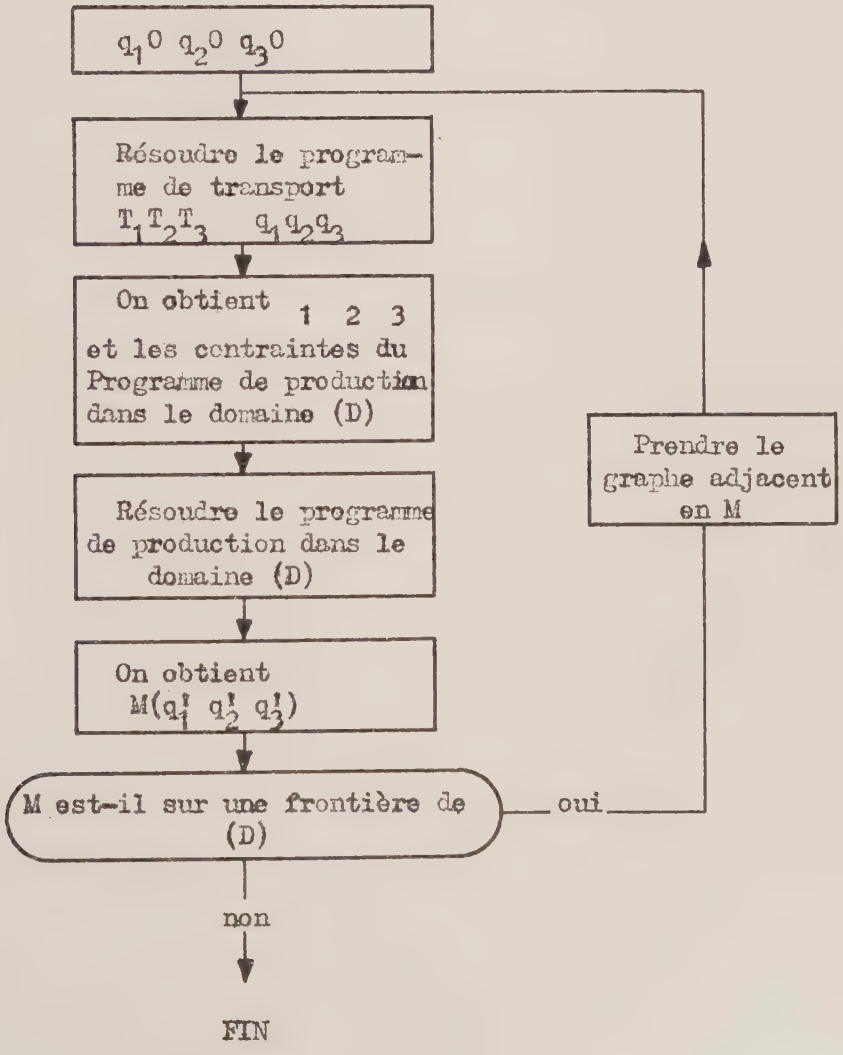
.../...

D'autre part, il n'est pas possible de rencontrer deux fois la même zone dans le cheminement de l'ensemble $M(q_1\ q_2\ q_3)$.

Exemple de cheminement de M en 5 itérations.



Nous pouvons écrire l'organigramme suivant :



2ème PARTIE

RESOLUTION DES PROGRAMMES DE TRANSPORT

ENTRE n SOURCES ET m ARRIVEES

Théorèmes fondamentaux de la programmation linéaire (forme standard)

Théorème I - Etant donné un problème de programmation linéaire $\begin{matrix} Ax = a \\ x \quad 0 \\ \text{Min } cx \end{matrix}$

a) s'il admet au moins un programme fini, il admet au moins un programme de base

b) s'il admet au moins un programme optimal fini, il admet au moins un programme optimal de base.

Théorème II - Théorème de dualité.

Etant donné un couple de problèmes duals, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un programme $\tilde{x}$ (ou $\tilde{u}$) de l'un des problèmes soit optimal est qu'il existe un programme $\tilde{u}$ (ou $\tilde{x}$) de l'autre problème de telle sorte que

$$c\tilde{x} = \tilde{u}\,d$$

Ce programme est lui-même un programme optimal.

Théorème III - Théorème faible des écarts complémentaires -

Etant donné un couple de problèmes duals, une condition nécessaire et suffisante pour que les programmes $\tilde{x}$ et $\tilde{u}$ soient optimaux est qu'ils vérifient les relations

$$\tilde{u}(A\tilde{x} - d) = 0$$

$$(c - \tilde{u}A)\,\tilde{x} = 0$$

Théorème IV - Si on considère le programme linéaire

$$A\,x = a \qquad x \geqslant 0$$

$$\text{Min } cx$$

si on suppose A fixe et si on fait varier a et c. L'optimum devient une fonction $\Omega(a, c)$.

Cette fonction $\Omega(a, c)$ est une fonction bilinéaire de a et de c, par morceaux.

.../...

Chapitre VII

[7] La méthode graphique de résolution des programmes de transport entre n sources et 3 arrivées, et de détermination de la zone $\Delta(M)$ dans laquelle l'arbre a_o associé à la solution optimale d'un problème particulier, reste optimal et réalisable pour un problème différent, n'est pas facilement généralisable quand le nombre d'arrivées dépasse 3.

Pour lever cette difficulté, nous donnerons dans la 2ème partie de cette thèse une méthode différente de résolution des programmes de transport par les problèmes comportant $m > 3$ arrivées.

Cette méthode, assez différente des méthodes habituelles, semble intéressante pour une structure particulière du problème de transport posé :

$$m \ll n.$$

Considérons le problème de transport suivant (F) :

(F)

$$\sum_j x_{ij} = a_i \qquad i \in (1\ 2 \dots n)$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad j \in (1\ 2 \dots n)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } f = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j$$

Nous supposerons de plus, par la suite, que

$$a_i > 0 \qquad \forall i \in (1\ 2 \dots n)$$

$$b_j > 0 \qquad \forall j \in (1\ 2 \dots m)$$

l'ensemble des a_i sera le vecteur $a > 0$

l'ensemble des b_j sera le vecteur $b > 0$.

.../...

7-1 Considérons le problème restreint (F_0)

$$\sum_j x_{ij} = a_i \qquad i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad j \in J = (1\ 2\ \ldots\ m)$$

$$\text{Min } f = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

La solution de base optimale de ce problème satisfait n contraintes parmi les n+m du problème initial. Elle est telle que :

$$\tilde{x}_{ik} = a_i \qquad \forall i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

k étant tel que, pour tout i

$$c_{ik} = \min_j c_{ij}$$

Cette solution initiale est unique en général.

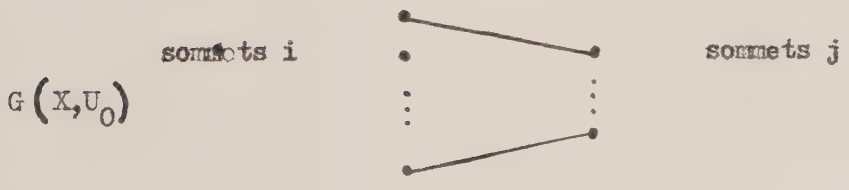
Elle est représentable par le graphe $G_0\ (X, U_0)$

X étant l'ensemble des n+m sommets indices i et j

U_0 étant l'ensemble des n arêtes issues des n sommets i pendants.

Le coût total de ce programme de transport restreint est

$$f_0 = \sum_i c_{ik}\, a_i$$



.../...

Considérons les $\tilde{x}_{ij}$ appartenant à la solution initiale

et soit

$$h_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij} \qquad \forall j \in J$$

Il est possible de partitionner J en

J_1 ensemble des m_1 indices j_1 tels que $\Delta j_1 = h_{j_1} - b_{j_1} > 0$

J_2 ensemble des m_2 indices j_2 tels que $\Delta j_2 = h_{j_2} - b_{j_2} = 0$

J_3 ensemble des m_3 indices j_3 tels que $\Delta j_3 = h_{j_3} - b_{j_3} < 0$

avec $m_1 + m_2 + m_3 = m$

$$\sum_j \Delta j = 0 \qquad j \in J$$

Dans ce cas nous pouvons remarquer que la solution initiale précédente est aussi solution du problème (F'_0)

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad \forall i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_{j_2} \qquad \forall j_2 \in J_2 \subset J$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } f = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

La solution initiale satisfait donc $m_2 + n$ contraintes.

7-2 Considérons maintenant le problème suivant : (F_1)

.../...

Etant donné $j_1^* \in J_1$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in J_2 + \left\{j_1^*\right\}$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } f = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

satisfaisant $m_2 + n + 1$ contraintes

On obtient la solution optimale de ce problème (F_1) à partir de la solution du problème (F_0') en transférant au coût de transfert minimum P_j^* la quantité de bien $\Delta_j^* = h_j^* - b_j^*$ disponible au sommet j* vers l'ensemble des sommets $j_3 \in J_3$.

Le coût total du programme de transport (F_1) sera

$$f_1 = f_0 + P_j^* \Delta_j^*$$

Dans le paragraphe suivant nous expliciterons les notions introduites ici de transfert, et de coût de transfert minimum

---

7-3 Pour résoudre le problème original (F), il serait tentant d'introduire les m_1 contraintes

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad j \in J_1$$

l'une après l'autre, c'est-à-dire d'étudier les transferts successifs des quantités de bien disponibles aux sommets $j_1 \in J_1$, $\Delta j_1 > 0$, vers les sommets $j_3 \in J_3$.

Nous parviendrions ainsi en un nombre fini d'étapes m_1, à la solution du programme initial dont le coût serait

$$f = f_0 + \sum_{j \in J_1} P_{j_1}\, \Delta j_1$$

étant donné la relation $\sum_{j \in J} \Delta j = 0$

.../...

Il faudrait étudier l'importance du choix de l'ordre des sommets $j_1 \in J_1$ étudiés successivement sur la structure du graphe $G(X, U_f)$ final, qui est un arbre à n + m - 1 arêtes. Aussi reprendrons-nous cette étude de manière différente ci-après.

7-4 Etude du transfert de Δ_j^* Résolution de (F_1)

7-4-1 Chemin de transfert -

Considérons le graphe total $\Gamma(X, \mathcal{U})$,

X étant l'ensemble des n+m sommets $i \in I$ et $j \in J$

$\mathcal{U}$ étant l'ensemble des arcs u_{ij}

et le graphe partiel $G(X, U_0)$ correspondant à la solution réalisable optimale du problème F_0.

Soit j^* un sommet de J_1

j_3 un sommet de J_3

$\mathcal{E}$ l'ensemble des chemins orientés menant de j^* à j_3 dans Γ

$\Phi \subset \mathcal{E}$ est l'ensemble des chemins sans cycles $\varphi(j^*, j_3)$ tels que si j est un sommet intermédiaire du chemin $(j \neq j^* \text{ et } j \neq j_3)$ on ait $j \in J_2$.

W est l'ensemble des arcs du chemin $\varphi(j^* j_3)$

$$W = U + V$$

U est l'ensemble des arcs de φ qui ont une orientation différente dans φ et dans Γ

V est l'ensemble des arcs de φ qui ont même orientation dans φ et dans Γ

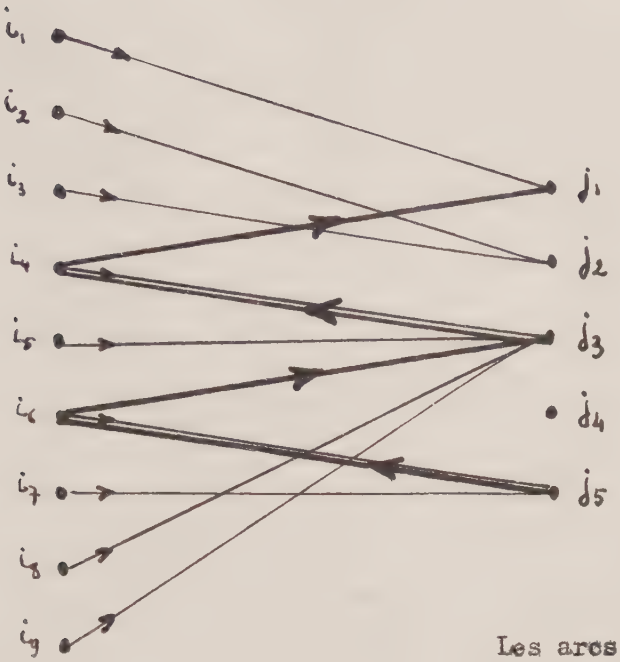
Il y a 2 r éléments dans W, soit r arcs v_{ij} dans V, et r arcs u_j dans U. Il y a aussi r-1 sommets $j \in J_2$ appartenant au chemin φ. Nous dirons que φ est un chemin d'ordre r.

Notation $\varphi_r(j^* j_3)$.

.../...

7-4-2 Représentations graphiques d'un chemin de transfert :

1



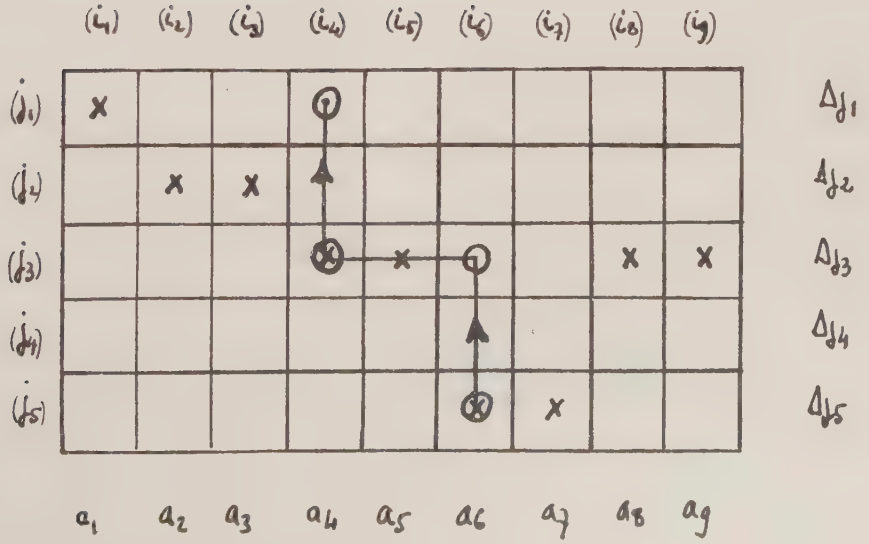
Les arcs $i \longrightarrow j$ appartiennent à $G(X, U_0)$ notés X

Les arcs $\longleftarrow$ appartiennent à $\varphi_r(j_5, j_1)$ notés 0.

φ_r est ici un chemin de transfert d'ordre 2, réalisable.

U comporte les arcs $\overrightarrow{j_5, i_6}$ et $\overrightarrow{j_3, i_4}$

V comporte les arcs $\overrightarrow{i_6, j_3}$ $\overrightarrow{i_4, j_1}$



.../...

7-4-3 Chemin de transfert réalisable -

Si l'ensemble $-U_e$ des arcs $-u_{ji}$ du chemin $\varphi_r(j^* j_3)$ appartient à U_0 ($-U_e \subset U_0$),

le chemin de transfert est dit réalisable : $\varphi_r(j^* j_3) = e_r(j^* j_3)$.

Soit $E \subset \Phi$ l'ensemble des chemins réalisables.

Théorème : le transfert d'une quantité de bien δ_{j^*} d'un sommet j^* à un sommet j_3 sur Γ, ne peut être effectué que le long d'un chemin réalisable.

(si j intermédiaire $\neq J_2$)

7-4-4 Capacité de transfert sur un arc en un sommet j -

A tout arc $-u_{ji} \in -U_e$ d'un chemin réalisable correspond une valeur $\tilde{x}_{ji} > 0$ de la solution de (F_0) réellement transportée sur cet arc.

$\theta_j = \tilde{x}_{ji}$ est la capacité de transfert au sommet j.

Autrement dit, il ne peut être transféré de j à j' une quantité de bien supérieure à celle qui existait en j. Si l'on transfère exactement cette valeur, l'arc u_{ji} disparaît, donnant une rupture dans le chemin $\varphi_r(j^* j_3)$.

7-4-5 Capacité de transfert maximum pour le chemin $e_r(j^* j_3)$.

Pour qu'aucune arête du chemin $e_r(j^* j_3)$ ne disparaisse il faut que la quantité de bien maximum transférable de j^* à j_3 soit

$$\theta \leqslant \min_{j \in e_r(j^* j_3)} \theta_j \qquad j \neq j_3$$

7-5 - Coût de transfert :

A chaque chemin $e_r(j^* j_3) \in E$ on associe un coût unitaire de transfert

$$p(j^* j_3)$$

la définition même du chemin $e_r(j^* j_3)$ entraîne que si c_{ij} est le coût unitaire d'un transport sur l'arc u_{ij} noté c_u

$$p(j^* j_3) = -\sum_{u \in U} c_u + \sum_{v \in V} c_v$$

.../...

7-5-1 Chemin de transfert optimal -

Etant donné j^* et j_3, parmi tous les chemins de transfert réalisables le chemin de transfert optimal est tel que

$$\tilde{p}(j^* j_3) = \min_{e \in E} p(j^* j_3)$$

Nous noterons ce chemin $\tilde{e}_r(j^* j_3)$

De plus ce chemin est tel, que la somme algébrique des coûts de transport le long de chaque maille de base du graphe $G(X, U_0 + V)$ est positive ou nulle.

7-6 Transfert de Δ_{j^*} -

A tout $j_3 \in J_3$ nous pouvons faire correspondre un chemin de transfert réalisable optimal $\tilde{e}_r(j^* j_3)$.

Nous retiendrons le chemin $\tilde{e}_{j^*}$ tel que

$$\tilde{p}\, j^* = \min_{j_3 \in J_3} \tilde{p}(j^* j_3)$$

le long de ce chemin nous transférerons $\delta_{j^*} = \min(\Delta_{j^*}, \theta, \Delta_{j_3})$.

En effet

1) si $\delta_{j^*} = \Delta_{j^*}$

Dans ce cas le problème (F_1) est résolu, et $f_1 = f_0 + \tilde{p}_{j^*} \Delta_{j^*}$. La partition $J_1 J_2 J_3$ de J deviendra

$$J_1' = J_1 - \{j^*\}$$
$$J_2' = J_2 + \{j^*\}$$
$$J_3' = J_3$$

et nous nous proposerons de résoudre (F_2)

Etant donné $j^{**} \in J_1'$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in J_2' + \{j^{**}\}$$

$$\text{Min } f = \sum_{i,j}^{x_{ij} \geq 0} c_{ij}\, x_{ij}$$

.../...

2) Si $\delta j^* = \Theta$ ou $\Delta j_3 < \Delta j^*$ -

Ces deux cas sont semblables en ceci que lorsque le transfert de δj^* de j^* à j_3 a été réalisé, le chemin $\tilde{e}_r(j^* j_3)$ utilisé n'est plus valable :

- se trouvant sectionné si $\delta j^* = \Theta$

- se trouvant sans objet si $\Delta j_3 = \delta j^*$, auquel cas nous aurons

$$J_2' = J_2 + \{j_3\}$$

$$J_3' = J_3 - \{j_3\}$$

Il faudra rechercher de nouveau le chemin $\tilde{e}_r(j^* j_3')$ optimal et se livrer à la même discussion que précédemment, étant donné la nouvelle quantité disponible au sommet j^* et qu'il faudra transférer vers J_3'

$$\Delta' j^* = \Delta j^* - \delta j^*$$

7-7 Résolution du programme de transport initial F

Nous venons de voir que d'un sommet j^* à un sommet j_3, le transfert de la quantité de bien Δj^* ne se fait pas obligatoirement en une seule opération mais en un nombre fini , chacune correspondant au transfert de la quantité de bien δj^* : que nous appelerons transfert élémentaire.

D'autre part, à partir de la solution optimale (F_0') nous obtiendrons la solution du problème initial (F) en transférant des sommets $j_1 \in J_1$ aux sommets $j_3 \in J_3$ les quantités de bien $\sum_{j_1 \in J_1} \Delta j_1$, de telle sorte que chaque transfert élémentaire d'une quantité δj_1 corresponde au coût de transfert minimum quel que soit $j_1 \in J_1$ à l'étape considérée.

C'est-à-dire qu'il n'est pas obligatoire de transférer - tout Δj_1 de $j_1 \in J_1$ vers $j_3 \in J_3$, puis tout $\Delta j_1'$ ... comme dans le cas traité ci-dessus d'une seule contrainte supplémentaire (F_1). Ainsi le coût du programme final

$$f = f_0 + \sum \delta j_1 \, \tilde{\tilde{p}}(j_1 j_3)$$

sera le meilleur coût possible puisque

.../...

chaque coût $[\delta_j . \tilde{\tilde{p}}(j\, j_3)]$ est minimum

$$\sum_{j \in J_1} \delta j = \sum_{j_1 \in J_1} \Delta j_1 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in J} \Delta j = 0$$

$$\text{et } \tilde{\tilde{p}}(j_1 j_3) = \min_{j_1 \in J_1} \tilde{p}\,(j_1 j_3)$$

correspondant au chemin $\tilde{\tilde{e}}_r(j_1 j_3)$ optimal.

7-8 Détermination de $\tilde{\tilde{p}}(j_1 j_3)$ -

Nous considérerons le tableau carré T(m.m)

Dans chaque case indicée jj' $j \neq j'$ ©

j indice d'une ligne de T $j \in J_1 + J_2$

j' indice d'une colonne de T $j' \in J_2 + J_3$

nous placerons le coût du chemin optimal de 1ère espèce $e_1(jj') = p(jj')$.

Un chemin d'ordre r est en réalité formé de r chemins d'ordre 1

$$e_r(j^* j_3) = e_1(j^* j_2) + e_1(j_2 j_2') + \ldots + e_1(\bar{j}_2 j_3) \qquad (\bullet)$$

$$\text{et } p\,(j^* j_3) = p(j^* j_2) + p(j_2 j_2') + \ldots + p(\bar{j}_2 j_3)$$

Pour avoir l'ensemble Ej* des chemins réalisables il suffira de chercher toutes les combinaisons possible $j^*, j_2^1, j_2^2, j_2 \ldots, j_3$ $0 \leqslant \ell \leqslant m_2$, $j_2^\ell \in J_2$ et en consultant le tableau T on aura l'ensemble des coûts de transfert correspondant

d'où $\tilde{p}(j^* j_3)$ et $\tilde{e}_r(j^* j_3)$

On répétera l'opération pour tout $j_1 \in J_1$ et on chosira

$$\tilde{\tilde{p}}(j_1 j_3) = \min_{j_1 \in J_1} \tilde{p}(j_1 j_3)$$

.../...

Exemple : Soit à résoudre le problème F

$$\begin{cases} \sum_j x_{ij} = a_i \\ \sum_i x_{ij} = b_j \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$, Min $f = \sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij}$

Tableau des coûts C_{ij}

							$b_j =$
5	2	4	8	2	9	7	15
7	6	4	6	7	6	1	15
3	1	12	3	3	5	7	18
9	7	5	1	2	4	8	22
$a_i =$	10	12	8	7	13	15	5

---

la solution de F_0 est

							$b_j =$
				13			13
		8				5	13
10	12						22
			7		15		22
$a_i =$	10	12	8	7	13	15	5

$\begin{cases} J_3 = (1,2) \\ J_2 = (4) \\ J_1 = (3) \end{cases}$

Etape 1, Tableau T_1

	1	2	3	4
1				
2	1	4		6
3	5	2		
4				

$\tilde{e}(3,1)$ optimal → F_1 → $\delta = \Delta_1 = 2$

							$b_j =$
	2			13			15
		8				5	13
10	10						20
			7		15		22
$a_i =$	10	12	8	7	13	15	5

$\begin{cases} J_3 = (2) \\ J_2 = (1,4) \\ J_1 = (3) \end{cases}$

Etape 2, Tableau T_2

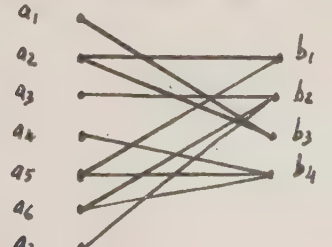
	1	2	3	4
1		4		0
2				
3	1	4		6
4	5	2		

$\tilde{e}(3,1,4,2)$ optimal → F_2 → $\delta = \Delta_3 = 2$

							$b_j = b_j =$
	4			11			15
		8			2	5	15
10	8						18
			7	2	13		22
$a_i =$	10	12	8	7	13	15	5

Cette solution est la solution finale de F

correspondant au graphe $G(XU)$



7-9 - Considérons le problème de transport

F'

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad \forall i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \quad b_j \qquad \forall j \in (1\ 2\ \ldots\ m)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\sum_{i} a_i < \sum_{j} b_j$$

$$\text{Min } f = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

De la même manière que précédemment on obtiendra la solution optimale, de F en résolvant tout d'abord le problème F_0

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } f_0 = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

et, en considérant les $\widetilde{x_{ij}}$ appartenant à la solution optimale do F_0 tels que

$$h_j = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x_{ij}} \qquad \forall j \in J$$

en partitionnant J en

J_1 ensemble des m_1 indices j_1 tels que $\Delta j_1 = h_{j_1} - b_{j_1} > 0$

J_2 " m_2 " j_2 tels que $\Delta j_2 = h_{j_2} - b_{j_2} = 0$

J_3 " m_3 " j_3 " $\Delta j_3 = h_{j_3} - b_{j_3} < 0$

Dans le cas présent, étant donné la relation $\left|\sum_{j_3 \in J_3} \Delta j_3\right| > \sum_{j_1 \in J_1} \Delta j_1$

il suffira de transférer de la meilleure manière possible - c'est-à-dire suivant le processus étudié au chapitre précédent - la quantité de bien $\sum \Delta j_1$ des

.../...

sommets $j_1 \in J_1$ vers les sommets $j_3 \in J_3$, pour obtenir la solution optimale de F'.

En effet, étant donné un sommet $j^* \in J_1$, et un sommet $j_3 \in J_3$, la recherche du chemin de transfert optimal $\tilde{e}_r(j^* j_3)$ est indépendante des relations :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij_3} = b_{j_3} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij_3} < b_{j_3}$$

Ce chemin ne dépend en effet que de la valeur de

$$\tilde{p}(j^* j_3) = \min_{e \in E} p(j^* j_3)$$

Il faut noter cependant que la résolution du problème F' sera en général beaucoup plus rapide que la résolution du problème correspondant F.

En effet, à chaque étape du calcul, il n'est pas nécessaire de se préoccuper des contraintes

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij_3} = b_{j_3} \qquad j_3 \in J_3,$$

c'est-à-dire que par définition même de J_3 on a

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij_3} = h_{j_3} < b_{j_3} \qquad j_3 \in J_3$$

Par exemple F_0 est aussi solution optimale du problème F''_0.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad \forall i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant b_j \qquad \forall j \in (J_2 + J_3)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } f = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

vérifiant $n+m_2+m_3$ contraintes au lieu de $n+m_2$ contraintes pour F'

.../...

Exemple : Soit à résoudre le problème F'

$$\sum_j x_{ij} = a_i$$

$$\sum_i x_{ij} \leq b_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\text{Min } f = \sum c_{ij}\, x_{ij}$$

Tableau des coûts unitaires C_{ij}

							$b_j =$
5	2	4	8	2	9	7	18
7	6	4	6	7	6	1	15
3	1	12	3	3	5	7	18
9	7	5	1	2	4	8	23
$a_i =$	10	12	8	7	13	15	5

la solution F_0 est

				13			$h_1 = 13$
		8				5	$h_2 = 13$
10	12						$h_3 = 22$
			7		15		$h_4 = 22$
$a_i =$	10	12	8	7	13	15	5

Tableau T_1

	1	2	3	4
1				
2				
3	1	4		6
4				

le chemin $\tilde{e}(3,1)$ est optimal

$\delta = \Delta_3 = 4$

F_1

$a_i =$	10	12	8	7	13	15	5	$h_j \leq b_j$
		4			13			$\rightarrow 17 < 18$
			8				5	$\rightarrow 13 < 15$
10	8							$\rightarrow 18 = 18$
				7		15		$\rightarrow 22 = 22$

Cette solution est la solution finale de F' : elle correspond (comme il est souvent le cas dans cette sorte de problèmes) à un arbre dégénéré.

.../...

Chapitre VIII

[8] Comparaison avec l'Algorithme primal-dual.

La méthode particulière de résolution des programmes de transport que nous présentons au chapitre VII est supportée par la méthode générale - appelée Primale-duale par Dantzig-Ford et Fulkerson - de résolution des programmes linéaires.

8-1 Etant donné un problème initial - le problème primal - on cherche le problème dual correspondant (b). On associé à ce dual un problème primal restreint que l'on résout. Si la solution optimale réalisable de ce problème est une solution réalisable du primal, elle est aussi la solution optimale de ce primal. Sinon on détermine un nouveau programme dual et on recommence les calculs à partir de (b).

Après un nombre fini d'itérations, ou bien le programme optimal du problème restreint est un programme du primal, ou bien on met en évidence l'absence de solution du problème initial.

8-2 Formulation Mathématique. (A est une matrice, x, a, c, u, v sont des vecteurs). On considère le problème primal sous la forme standard

$$Ax = a \qquad a > 0$$

$$x \geqslant 0$$

$$\text{Min } f = c\,x$$

et son dual

$$u\,A \leqslant c$$

$$\text{Max} \quad u\,a$$

On introduit le problème primal auxiliaire

$$A\,x + \varepsilon = a$$

$x \geqslant 0$ ε étant un vecteur de variables artificielles

$\varepsilon \geqslant 0$ e étant un vecteur formé de 1.

$$\text{Min} \quad e\varepsilon$$

On cherchera à résoudre alors le problème primal auxiliaire restreint suivant et son dual ; étant donné une valeur initiale u^0 du programme dual.

.../...

Soit

$$\left|\begin{array}{ll} A\,x + \varepsilon = a & \\ x \geqslant 0 & \\ \varepsilon \geqslant 0 & \\ c - v_0 A \quad 0 & \\ c^j - v_0 A^j \quad 0 & \Longrightarrow x_j = 0 \\ \text{Min } e\varepsilon & \end{array}\right.$$

Soit ε_0, x_0, v_0 les vecteurs correspondant à la solution optimale réalisable de ce problème

1°) si $\varepsilon_0 = 0$ cette solution est aussi solution optimale du problème primal initial

2°) si $\varepsilon_0 > 0$ on considère l'ensemble J des indices j tels que

$$J = \left\{ j / c^j - v_0 A^j = 0 \right\}$$

(et $J + \bar{J} = T$ ensemble total des indices j)

si v est le vecteur des variables duales du problème auxiliaire restreint à l'optimum on a v_0 tel que

$$\left|\begin{array}{ll} A^J x_J + \varepsilon_0 = a & \\ x_J \geqslant 0 & \\ \varepsilon \geqslant 0 & \end{array}\right. \qquad \text{et} \quad \left|\begin{array}{ll} v_0 A^J \leqslant 0 & \left\{\begin{array}{l} v_0 A^j = 0 \text{ si } x_j = 0 \\ v_0^i = 1 \quad \text{si } \varepsilon^i > 0 \end{array}\right. \\ v_0 \leqslant e & \end{array}\right.$$

3°) on considère alors le nouveau vecteur dual

$$u_\theta = v_0 + \theta v_0$$

et si $\delta_0^j = c_0^j - v_0 A^j$

$$\delta_\theta^j = \delta_0^j - \theta v_0 A^j$$

4°) on maximise alors sous la condition $\delta_\theta \geqslant 0$

$$\text{soit } \hat{\theta} = \min_{j \in \bar{J}} \left\{ \frac{\delta_j}{v_0 A^j} / v_0 A^j > 0 \right\}$$

.../...

Si $v_0 A^j \leqslant 0 \quad \forall j \in T$ le problème primal initial est impossible.

Sinon on considère le nouvel ensemble J_1 tel que

$J_1 = \left\{ j \;/\; \delta_\theta^j = 0 \right\}$ et on résout le problème restreint auxiliaire correspondant § 2. .

8-3 Algorithme de Ford et Fulkerson pour les problèmes de transport et comparaison avec la méthode exposée au chapitre 7.

Remarque : 1) Dans cet algorithme, chaque résolution d'un problème primal auxiliaire restreint correspond à la résolution d'un problème de Flot maximal dans un réseau restreint.

2) Nous noterons F.F. dans le cas où l'algorithme utilisé sera celui de Ford et Fulkerson, VII dans le cas de la méthode présentée au chapitre 7.

8-4 Considérons le problème de transport

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad \forall i \in (1\ 2\ \ldots\ n) = I$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad \forall j \in (1\ 2\ \ldots\ n) = J$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } f = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

8-4-1 Choix du programme dual initial u_0 et détermination du programme auxiliaire restreint correspondant.

L'étude de 8-4 permet de mettre en évidence une première différence entre l'algorithme usuel de Ford et Fulkerson et la méthode présentée VII. Dans F.F on a en effet

$$u_0 \begin{cases} u_j = \min_i c_{ij} & \forall j \in J \\ u_i = \min_j (c_{ij} - u_j) & \forall i \in I \end{cases}$$

Dans VII on a

$$u_0 \begin{cases} u_j \text{ indéterminé} \quad \text{on prend } u_j = 0 & \forall j \in J \\ u_i = \min_j c_{ij} & \forall i \in I \end{cases}$$

.../...

Si dans les deux méthodes $\tilde{x}_{ij} > 0$ fait partie de la solution de base réalisable optimale du problème auxiliaire restreint associé à u_0, on a dans F.F

$$(F_0)\quad \begin{cases} \sum_j \tilde{x}_{ij} = a_i & \forall i \in I_1 \\ \sum_j \tilde{x}_{ij} < a_i & \forall i \in I_2 \end{cases} \qquad I_1 + I_2 = I$$

$$\begin{cases} \sum_i \tilde{x}_{ij} = b_j & \forall j \in J_1 \\ \sum_i \tilde{x}_{ij} < b_j & \forall j \in J_2 \end{cases} \qquad J_1 + J_2 = J$$

donc $\varepsilon \geqslant 0$

$$\text{et } \varepsilon \begin{cases} \varepsilon_i = a_i - \sum_j \tilde{x}_{ij} & \forall i \in I \\ \varepsilon_j = b_j - \sum_i \tilde{x}_{ij} & \forall j \in J \end{cases}$$

et dans VII

$$(F_0)\quad \begin{cases} \sum_j \tilde{x}_{ij} = a_i & \forall i \in I \\ \sum_i \tilde{x}_{ij} > b_j & \forall j \in J_1 \\ \sum_i x_{ij} = b_j & \forall j \in J_2 \\ \sum_i x_{ij} < b_j & \forall j \in J_3 \end{cases} \qquad J_1 + J_2 + J_3 = J$$

et

$$\varepsilon \begin{cases} \varepsilon_i = 0 & \forall i \in I \\ \varepsilon_j \geqslant 0 & \forall j \in J_2 + J_3 \\ \varepsilon_j < 0 & \forall j \in J_1 \end{cases}$$

Nous avons mis en évidence trois différences dont une très importante :

1) les programme duals initiaux sont différents dans F.Fet dans VII
2) les programmes primals restreints auxiliaires sont différents
3) la condition $\varepsilon > 0$ précisée dans la méthode générale 8-2 n'est plus respectée dans VII.

.../...

8-4-2 Nous pourrons cependant appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson à partir de la solution u_0 du programme dual et (F_0) du problème auxiliaire restreint obtenus dans VII.

Il faudra cependant introduire le vecteur p

$$p \begin{cases} p_j = 1 & \forall\, j \in J_2 + J_3 \\ p_j = -1 & \forall\, j \in J_1 \end{cases}$$

et considérer le problème auxiliaire restreint de 8-2 sous la formulation

$$\left|\begin{array}{l} Ax + p\varepsilon = a \\ x, \varepsilon \geqslant 0 \\ c - u_0 A \geqslant 0 \\ c^j - u A^j > 0 \implies x_j = 0 \\ \text{Min } e\varepsilon \end{array}\right.$$

8-4-3 A partir de la même solution u_0 initiale du dual et la même solution F_0 du premier problème restreint, la succession des opérations qu'il faut effectuer dans F.F et dans VII est la même, la recherche d'un chemin de transfert optimal élémentaire dans VII correspondant à la recherche d'un nouveau dual u dans F.F ; le transfert de la quantité maximum transférable v_j correspondant à la solution du problème de flot maximum associé au problème auxiliaire restreint déterminé par u .

En réalité si le chemin de transfert optimal $e_r(j, j_3)$ est d'ordre r, il faudra une seule itération dans VII pour le déterminer alors qu'il faudra r itérations dans F.F. pour déterminer les r programmes duals u_r, associés aux r chemins élémentaires de $\tilde{e}_r(j_1 j_3)$.

.../...

Exemple : soit à résoudre le problème F

$$\sum_j x_{ij} = a_i$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{Min } f = \sum c_{ij}\, x_{ij}$$

					$b_j =$
5	2	2	4	6	14
1	9	7	3	4	32
6	3	1	7	8	26
$a_i =$ 15	14	12	13	18	

1 Résolution par la méthode présentée

11 Solution de F_0

					$h_j =$
	14				14
15			13	18	46
		12			12
$a_i =$ 15	14	12	13	18	

Tableau T_1

j / i	1	2	3
1		7	1
2	1		4
3			

$\tilde{e}(213)$ opt.

F_1

					$h_j =$
	1		13		14
15				18	33
	13	12			25
$a_i =$ 15	14	12	13	18	

Tableau T_2

j / i	1	2	3
1		1	1
2	2		4
3			

$\tilde{e}(213)$ opt

F_2

					$b_j =$
			13	1	14
15				17	32
	14	12			26
$a_i =$ 15	14	12	13	18	

(F_2) est la solution (F) du problème posé.

2 Résolution par la méthode primale-duale à partir de la solution de départ F_0

1ère étape

solution initiale F_0

	14			
15			13	18
		12		

correspondant à la matrice U_0A

1	2	1	3	4	0
1	2	1	3	4	0
1	2	1	3	4	0
1	2	1	3	4	(U_0)

0
-14
+14

entraînant

et à la matrice $C-U_0A = \Delta_0$

	14				0
15			13	18	-14
		12			+14
0	0	0	0	0	(ε_0)

4	0	1	1	5
0	7	6	0	0
5	1	0	4	4

et à la matrice V_0A

2	0	0	2	2	1
0	-2	-2	0	0	-1
2	0	0	2	2	1
1	-1	-1	1	1	(V_0)

Il vient $\hat{\theta} = \frac{1}{2}$

et $U_{\hat{\theta}}A = U_0A - \hat{\theta}\, V_0A$

$\Delta_0 = C - U_{\hat{\theta}}A =$

3	0	1	0	4
0	8	7	0	0
4	1	0	3	3

rrespondant à la solution F'_0

	14		0		0
15			13	18	-14
		12			+14
0	0	0	0	0	ε

F'_0 est identique à F_0

2ème étape

on construit

0	0	-2	0	0	-1
0	0	-2	0	0	-1
2	2	0	2	2	1
1	1	-1	1	1	V'

il vient $\hat{\theta}' = \frac{1}{2}$

$$\Delta_{\theta'} = \Delta_{\theta} - \hat{\theta}' V' A =$$

3	2	0	0	4
0	8	8	0	0
3	0	0	2	2

correspondant à la solution F_1

	1		13		0
15				18	-1
	13	12			+1
0	0	0	0	0	ε

Nous voyons qu'il a fallu deux étapes pour transférer la quantité = 13 de la 2ème ligne vers la 3ème ligne de la matrice F, alors que ceci a été réalisé en une seule étape e(213) dans la 1ère méthode.

Nous pouvons maintenant poursuivre les itérations pour passer de F_1 à F.

Chapitre IX

[9] Considérons à nouveau le problème de transport

$$(F)\qquad \boxed{\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in I = (1\ 2\ \dots\ n) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in J = (1\ 2\ \dots\ m) \\ x_{ij} \geqslant 0 \\ \text{Min } f = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij} \end{array}}$$

La méthode de résolution proposée au chapitre VII est surtout intéressante dans le cas où m est très inférieur à n.

Dans tous les cas, l'ensemble E des chemins de transfert réalisables $e_r(j^*j_3)$ contient d'autant plus d'éléments qu'il faudra tester pour déterminer le

$$\tilde{p}\,(j^*j_3) = \min_{e \in E} p_e(j^*j_3)$$

correspondant au chemin $e_r(j^*j_3)$ optimal, qu'il y a de sommets $j_2 \in J_2$.

Donc, plus m_2 et plus - à fortiori - m seront importants, plus la méthode comportera d'étapes et de difficultés.

Remarques :

1) si n est très supérieur à m, l'importance exacte de n sera pratiquement indifférente à la résolution du problème (F)

2) si n est très inférieur à m, il suffira de transposer la matrice c_{ij} des coûts, et de faire jouer aux b_j le rôle des a_i et réciproquement

3) certains artifices de calculs permettent d'accélérer l'obtention de la solution finale de (F).

.../...

9-1 Supposons maintenant $m < n$, peu différent de n, c'est-à-dire une matrice des coûts c_{ij} presque carrée.

Nous exposerons ci-dessous une méthode particulière faisant intervenir la notion nouvelle de "balance"

Soit la partition de I

I_1 contenant n_1 sommets i

I_2 contenant n_2 sommets i $\qquad n_1 + n_2 = n$

telle que n_2 soit très inférieur à m (par exemple $n_2 \not\# \frac{m}{2}$)

Nous résoudrons tout d'abord le problème (D)

(D)

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall\, i \in I_1$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_{ij} \leqslant b_j \quad \forall\, j \in J$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } d = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

La solution de ce problème étudiée au chapitre VII est en général rapidement obtenue, en particulier dans le cas présent du fait de la relation

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j$$

qui entraîne la relation $\sum_{i \in I_1} a_i \ll \sum_{j \in J} b_j$

Soit l'ensemble $\bar{X}$ des $\bar{x}_{ij}$ appartenant à la solution optimale de (D), et

$$h_j^0 = \sum_{i=1}^{n_1} \bar{x}_{ij} \quad \forall\, j \in J$$

considérons les $\beta_j^0 = b_j - h_j^0 \quad \forall\, j \in J$

coordonnées du vecteur $\beta^0 = b - h^0$

.../...

Nous avons résolu le programme de transport suivant

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall\, i \in I_1$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_{ij} = \beta_j^0 \quad \forall\, j \in J$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad \text{Min } d = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

et soit $d_0 = d(h^0)$ le coût de ce transport, qui est inférieur à tout coût de transport obtenu pour un vecteur $h \leqslant b$ c'est-à-dire tel que

$$h_j \leqslant b_j \quad \forall\, j \in J$$

et $$\sum_{j \in J} h_j = \sum_{i \in I_1} a_i$$

9-2 Nous résoudrons maintenant le problème de transport (D')

(D')

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad i \in I_2$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} x_{ij} = \beta_j^0 \qquad j \in J$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } d' = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

La solution de ce problème a été étudiée au chapitre VII, et étant donné la relation $n_2 \ll m$ elle est rapide, à partir du problème restreint

D'_0

$$\sum_{i=1}^{n_2} x_{ij} = \beta_j^0 \quad j \in J$$

$$\text{Min} \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

et de l'introduction des n_2 contraintes $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad i \in I_2$

.../...

Soit $d'(\beta^0) = d'(h^0)$ le coût total minimum de (D') étant donné la solution de (D).

$D(h^0) + D'(h^0)$ est solution de F tel que

$$f = d(h^0) + d'(h^0)$$

la solution optimale de (F) sera trouvée par le vecteur $\tilde{h} \leqslant b$ tel que

$$f(\tilde{h}) = d(\tilde{h}) + d'(\tilde{h}) = \min_{\forall h \leqslant b} \left[d(h) + d'(h) \right]$$

9-3 Balance :

Considérons deux sommets k_1 et k_2 $k_1, k_2 \in J$ et le problème de transport (D').

Puisque $d'(h^0)$ n'est pas en général, la solution optimale absolue de D', c'est-à-dire qu'on peut trouver un vecteur h' tel que

$$d'(h') < d'(h^0) ,$$

nous pourrons considérer le chemin de transfert $\hat{e}_r(k_1, k_2)$, correspondant au gain $\hat{g}(k_1 k_2)$.

La détermination de $g(k_1 k_2)$ est identique à la détermination de $p(k_1 k_2)$ au chapitre

$$g(k_1 k_2) = \sum_{v \in V} C_v - \sum_{u \in U} C_u$$

V et U étant les ensembles d'arcs u_{ij} appartenant au chemin $\hat{e}$. Si nous effectuons le transfert de la quantité de bien $\delta(k_1)$ de k_1 vers k_2, nous obtiendrons la solution optimale

$$d'(h') = d'(h^0) - g(k_1 k_2) . \delta(k_1)$$

du problème

$D'(h')$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in I_2$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} x_{ij} = \beta'_j \quad \forall j \in J$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } d' = \sum_{ij} x_{ij} c_{ij}$$

.../...

Avec $\beta'_j = \beta^0_j \quad \forall j \neq k_1$ et $k_2 \in J$

$$\beta'_{k_1} = \beta^0_{k_1} - \delta_{k_1}$$

$$\beta'_{k_2} = \beta^0_{k_2} + \delta_{k_2}$$

Cependant pour que les contraintes de (F) soient satisfaites pour ce nouveau β' il faudra parallèlement transférer dans (D) la même quantité δ_{k_1}, du sommet k_2 au sommet k_1 le long du chemin $e_r(k_2 k_1)$, qui lui correspond à une perte $p(k_2, k_1)$ telle que

$$d(h') = d(h^0) + p\,(k_2 k_1)\,\delta(k_1)$$

9-3-1 Réalisabilité de la balance.

Nous dirons que la balance - c'est-à-dire la succession des deux transferts - est réalisable si

$$f(h') = f(h^0) + \left[p(k_2 k_1) - g(k_1 k_2)\right] \delta(k_1) \leqslant f(h_0)$$

$$\text{donc} \quad \left[g(k_1 k_2)\right] \geqslant \left|p(k_2 k_1)\right|$$

9-3-2 Impossibilité de la balance.

Si le choix de k_1 et k_2 J est tel que

$$\beta^0_{k_2} = b^0_{k_2} \text{ ou } \beta^0_{k_1} = 0 \quad \text{la balance est impossible.}$$

9-3-3 Optimalité locale de la balance.

Nous dirons qu'il y a balance optimale entre les sommets k_1 et k_2 choisis si les chemins $\hat{e}_r(k_1, k_2)$ pour (D') et $\tilde{e}_r(k_2, k_1)$ pour (D) sont tels

$$\hat{g}(k_1 k_2) = \max_{\hat{e} \in E\ D'} g(k_1 k_2)$$

$$\text{et} \quad \tilde{p}(k_2 k_1) = \min_{e \in E\ D} p(k_2 k_1)$$

.../...

Si une balance locale est optimale et réalisable, la quantité de bien Δ maximum transférable est, suivant les notations du chapitre VII

$$\Delta_1 = \min \left(b^0_{k_2} - \beta^0_{k_2},\ \theta_{\hat{e}} \right) \text{ sur le chemin } \hat{e}(k_1 k_2) \text{ de } D'$$

$$\Delta_2 = \min \left(\theta_{\tilde{e}},\ b^0_{k_1} - h^0_{k_1} \right) \text{ sur le chemin } \tilde{e}(k_2, k_1) \text{ de } D$$

$$\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$$

9-4 Recherche de la solution optimale de F.

A l'étape (0) correspondant à $F_0 = D_0 + D'_0$ nous chercherons parmi toutes les balances réalisables optimales localement, celle qui est préférable à toutes les autres c'est-à-dire faisant intervenir le couple de sommets $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2 \in J$ tels que

$$\hat{\tilde{g}}(\tilde{k}_1 \tilde{k}_2) - \tilde{\tilde{p}}(\tilde{k}_2 \tilde{k}_1) = \max_{k_1, k_2 \in J} \left[\hat{\tilde{g}}(k_1 k_2) - \tilde{\tilde{p}}(k_2 k_1) \right]$$

et d'étape en étape étant donné les relations

$$\left| \hat{\tilde{g}}(\tilde{k}_1 \tilde{k}_2)_{\text{étape } i} \right| \geqslant \left| \tilde{\tilde{g}}(\tilde{k}_1 \tilde{k}_2)\ \text{étape}_{i+1} \right|$$

et

$$\left| \hat{\tilde{p}}(\tilde{k}_2 \tilde{k}_1)_{\text{étape } i} \right| \leqslant \left| \tilde{\tilde{p}}(\tilde{k}_2 \tilde{k}_1)\ \text{étape}_{i+1} \right|$$

nous parviendrons à la solution optimale de F obtenue lorsque la $n^{\text{ième}}$ balance ayant été réalisée, la n+1ème balance sera soit irréalisable soit impossible.

.../...

Exemple : soit à résoudre le problème F

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad \forall i \in I$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad \forall j \in J$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{Min } f = \sum c_{ij}\, x_{ij}$$

c_{ij} :

							$b_j =$
5	2	4	8	2	9	7	15
7	6	4	6	7	6	1	15
3	1	12	3	3	5	7	18
9	7	5	1	2	4	8	12
12	5	13	4	9	8	2	11
4	13	11	13	8	1	12	11
$a_i =$	10	12	8	13	15	14 / 1	10

1°) on considère le problème (D)

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad \forall i \in I_1$$

$$\sum_i x_{ij} \leqslant b_i \quad \forall j \in J$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{Min } d = \sum c_{ij}\, x_{ij}$$

c_{ij} :

				$b_j =$
5	2	4	8	15
7	6	4	6	15
3	1	12	3	18
9	7	5	1	12
12	5	13	4	11
4	13	11	13	11
$a_i =$	10	12	8	13

la solution du problème correspondant est

				$a_i =$
		8		10
				12
10	12			8
			13	13

et la solution optimale $D(h^0)$ est

				$h^0_j =$
	5	8		13
				0
10	7		1	18
			12	12
				0
				0
$a_i =$	10	12	8	13

2°) on considère le problème (D')

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad \forall i \in I_2$$

$$\sum_i x_{ij} = \beta^{\cup}_j \quad \forall j \in J$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{Min } d' = \sum c_{ij}\, x_{ij}$$

						$a_i =$
2	7	3	2	9	8	15
9	6	5	4	8	1	14
7	1	7	8	2	12	10
$\beta^0_j =$ 2	15	0	0	11	11	

la solution du problème restreint correspondant est

2					
					11
	15			11	
$\beta^0_j =$ 2	15	0	0	11	11

et la solution optimale $D'(h_0)$ est

						$a_i =$
2	12			1		15
	3				11	14
				10		10
$\beta^*_j =$ 2	15	0	0	11	11	

$F(h_0)$ se présente donc sous la forme

	5	8	
10	7		1
			12
$a_i =$ 10	12	8	13

			$b_j =$
2			15
12	3		15
			18
			12
1		10	11
	11		11
15	14	10	

it $T_1(D)$ et $T_1(D')$ les deux tableaux
nant les coûts des chemins optimaux
1er ordre.

j \ i	1	2	3	4	5	6
1		0	-1	1	3	7
2						
3	1	3		-2	1	1
4	7	5	2		3	11
5						
6						

j \ i	1	2	3	4	5	6
1		5	1	0	7	6
2	-5		-4	-5	2	-5
3						
4						
5	-7	-2	-6	-7		-1
6						

la balance préférable est $\hat{e}(51)$ et $\tilde{e}(135)$

$\hat{g} = -7 \quad \tilde{p} = 0 \qquad \hat{g} - \tilde{p} = -7 \quad ; \Delta = 1$

	4	8		
10	8			
				12
				1

$a_i =$ 10 12 8 13

			$b_j =$
3			15
12	3		15
			18
			12
		10	11
	11		11

15 14 10

où $F(h_1)$

j \ i	1	2	3	4	5	6
1		0	-1	1	3	7
2						
3	1	4		6	4	1
4	7	5	2		3	11
5	4	2	-1	-3		9
6						

j \ i	1	2	3	4	5	6
1		5	1	0	7	6
2	-5		-4	-5	2	-5
3						
4						
5	5	-1	5	6		10
6	8	5	4	3	7	

la balance préférable est $\hat{e}(21)$ et $\tilde{e}(12)$

$\hat{g} = -5 \quad \tilde{p} = 0 \qquad \hat{g} - \tilde{p} = -5 \quad \Delta = 8$

D'où $F(h_2)$ =

				b_j =
	4			
		8		
10	8			
			12	
			1	
a_i =	10	12	8	13

11				15
4	3			15
				18
				12
			10	11
	11			11
	15	14	10	

d	1	2	3	4	5	6
1	//	4	-1	5	3	11
2	0	//	8	1	9	7
3	1	4	//	6	4	1
4	7	5	2	//	3	11
5	4	2	-1	-3	//	9
6	//	//	//	//	//	//

d	1	2	3	4	5	6
1	//	5	1	0	7	6
2	-5	//	-4	-5	2	-5
3	//	//	//	//	//	//
4	//	//	//	//	//	//
5	5	-1	5	6	//	10
6	8	5	4	3	7	//

balance préférable $\hat{e}(521)$ et $\tilde{e}(15)$

$\hat{g} - \tilde{p} = -3$ $\quad \Delta = 4$

$\hat{g} = -6$ et $\tilde{p} = 3$

				b_j =
		8		
10	8			
			12	
	4		1	
a_i =	10	12	8	13

15				15
	3	4		15
				18
				12
			6	11
	11			11
	15	14	10	

$F(h_3)$

d	1	2	3	4	5	6
1						
2	0		8	1	9	7
3	1	4		6	4	1
4	7	5	2		3	11
5	-3	1	-4	-3		8
6						

d	1	2	3	4	5	6
1		5	1	0	7	6
2	3		-1	-2	1	-5
3						
4						
5	5	-1	5	6		10
6	8	5	4	3	7	

il n'y a plus de balance réalisable possible $F(h_3)$ est la solution optimale de F.

Chapitre X

10 - Considérons le programme de transport

F

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad \forall i' \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad \forall j \in (1\ 2\ \ldots\ m)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } f = \sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij}$$

présenté sous la forme matricielle

$$A\,x = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

$$x \geqslant 0$$

$$\text{Min } c\,x$$

$\mathcal{B}$ étant l'ensemble d'indices définissant une base.

$x_B = (A^B)^{-1} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$ étant une variable de la base

$\delta' = C^B (A^B)^{-1} A - C$ étant un vecteur "critère de candidature"

Nous savons que si

$$x_B \geqslant 0$$
$$\delta^{\bar{B}} \leqslant 0$$
$$\delta^B = 0$$

La base B correspondant à un certain arbre a est réalisable et optimale.

Nous savons aussi que si, a et b, varient en restant dans un domaine convexe Z(B), la base B reste réalisable et optimale.

Le domaine Z(B) est défini par $(A^B)^{-1} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \geqslant 0$

.../...

La méthode de résolution présentée au chapitre VII permet de construire cette zone Z(B) de manière naturelle.

La solution du problème restreint (F_0) ne dépend que de la nature de la matrice des coûts c_{ij}. Elle est indépendante de la valeur de a ou b.

Etant donné $\sum_i a_i = \sum_j b_j$

Et nous pourrons toujours écrire

$$h_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij} \quad \forall j \in J$$

La partition de J en $J_1 J_2 J_3$ au contraire dépend des valeurs de a et b, en effet, considérons l'ensemble J_1 (par exemple) des indices j, tels que $\Delta_{j_1} = h_{j_1} - b_{j_1} \neq 0$.

Or $h_{j_1} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij_1}$

et $\tilde{x}_{ij_1} = a_i$ si j_1 est tel que

$$c_{ij_1} = \min_j c_{ij}$$

sinon $x_{ij_1} = 0$

On peut donc écrire $h_{j_1} = \sum_{i \in I_{j_1}} a_i$.

I_{j_1} étant l'ensemble des i tels que $c_{ij_1} = \min_j c_{ij}$

ot

$$\Delta_{j_1} = \sum_{i \in I_{j_1}} a_i - b_{j_1} > 0 \qquad \text{si } j_1 \in J_1$$

de même R_0

$$\Delta_{j_2} = \sum_{i \in I_{j_2}} a_i - b_{j_2} = 0 \qquad \text{si } j_2 \in J_2$$

$$\Delta_{j_3} = \sum_{i \in I_{j_3}} a_i - b_{j_3} < 0 \qquad \text{si } j_3 \in J_3$$

le système de relations R_0 entre a et b est nécessaire et suffisant pour définir la pétition de J.

10-1 - Considérons maintenant la suite S des transferts élémentaires que nous avons dû effectuer pour passer de la solution du problème restreint initial (F_0) à la solution optimale du problème (F).

Soit $\tilde{e}(j_1 j_3)$ un chemin optimal de transfert appartenant à cette suite, nous avons vu qu'il n'est possible de transférer le long de ce chemin

que $$\delta_{j_1} = \min (\Delta_{j_1}, \theta, \Delta_{j_3})$$

et $$\theta = \min_{\substack{j \in e(j_1 j_3) \\ j \neq j_3}} \theta_j$$

Quel que soit δ_{j_1}, le choix de δ_{j_1} dépend d'un système de relation R_e entre a et b : en effet

si $\delta_{j_1} = \Delta_{j_1}$ il faut $\begin{cases} \Delta_{j_1} < \theta \\ \Delta_{j_1} < \Delta_{j_3} \end{cases}$

si $\delta_{j_1} = \Delta_{j_3}$ il faut $\begin{cases} \Delta_{j_3} < \Delta_{j_1} \\ \Delta_{j_3} < \theta \end{cases}$

si $\delta_{j_1} = \theta$ il faut $\begin{cases} \theta < \Delta_{j_1} \\ \theta < \Delta_{j_3} \end{cases}$

Chacun de ces couples d'inégalités pouvant être ramené à un système R_e d'inégalités entre a et b.

Si E est l'ensemble des chemins $\tilde{e}(j_1 j_3)$ qu'il a fallu construire pour déterminer la solution de (F) à partir de la solution de (F_0), il lui correspond un ensemble R_E de relations entre a et b tel que

.../...

$$R_{\tilde{E}} = R_0 + \sum_{e \in \tilde{E}} R_e$$

$R_{\tilde{E}}$ définit la zone $Z(\mathcal{B})$

En effet, considérons deux vecteurs a' et b' tels que

$$\sum_{i \in I} a'_i = \sum_{j \in J} b'_j$$

vérifiant l'ensemble de relations $R_{\tilde{E}}$.

La base $\mathcal{B}$ et l'arbre a définiront la solution optimale réalisable du problème F'

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a'_i \qquad \forall i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

F' $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b'_j \qquad \forall j \in (1\ 2\ \ldots\ m)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } f = \sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij}$$

puisque la solution du problème restreint (F'_0) à la même structure que celle de F_0

que la partition initiale de J en $J_1 J_2 J_3$ est la même

que la suite S_e des transferts élémentaires est le même, puisque à chaque étape le choix du chemin de transfert optimale $\tilde{e}$ est indépendant de a et b, et le choix de la quantité $\delta_{j_1} = \min(\Delta j_1, \theta, \Delta j_3)$ qu'on peut réellement transporter le long de ce chemin est fonction du système $R_o \in R_{\tilde{E}}$.

Remarque : Il n'a pas été nécessaire de préciser la valeur do $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j = K$ pour étudier le système $R_{\tilde{E}}$.

.../...

Cependant dans le cas du problème posé au début de cette thèse nous avons $\sum_{i \in I} a_i = K = \text{cote}$.

Et chaque a_i est parfaitement donné.

Nous aurons donc la zone $Z(B) = Z(b)$, b étant caractérisé par rapport à a dans le zyztème $R_{\tilde{E}}$.

10-2 Passage d'une zone Z(B) à une zone adjacente Z(B')

Soit le problème de transport correspondant au vecteur b

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in (1\ 2\ \ldots\ n)$$

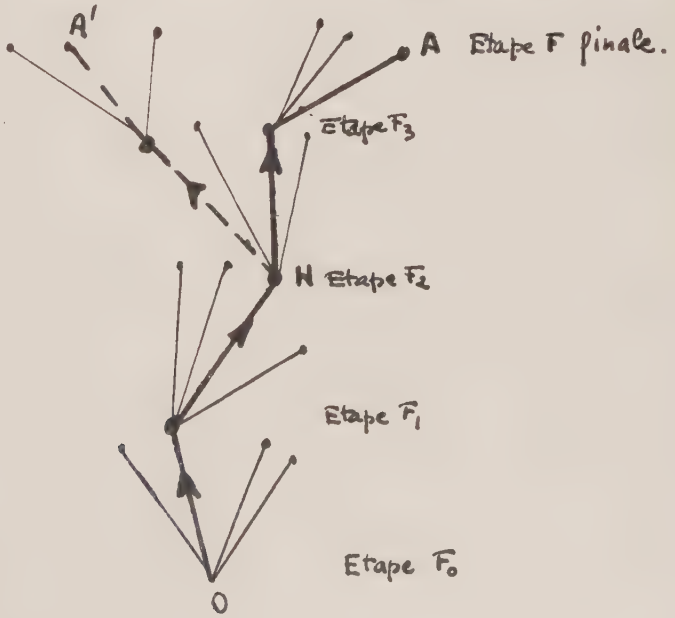
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in (1\ 2\ \ldots\ m)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\text{Min } f = \sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij}$$

et soient (B) et (a) la base et l'arbre associés à la solution optimale.

On peut représenter la succession des transferts effectués depuis la solution du problème restreint F_0 jusqu'à la solution de F par une arborescence.



.../...

A chaque étape parmi tous les chemins de transfert réalisables représentés par des arêtes de l'arborescence nous avons choisi le chemin $\sigma(j_1 j_3)$ représenté par l'arête en trait gras étant donné le système R_e de relations entre a et b.

L'ensemble des arêtes choisies de 0 à A correspond au système $R_{\tilde{E}}$ de relations, les systèmes R_e étant de plus en plus restrictifs d'étape en étape.

Considérons un vecteur b' peu différent de b, mais ne satisfaisant pas $R_{\tilde{E}}$.

Pour résoudre le problème F'

$$\left|\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in (1\ 2\ \ldots\ m) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b'_j \quad \forall j \in (1\ 2\ \ldots\ m) \\ x_{ij} \geqslant 0 \\ \text{Min} \sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij} \end{array}\right.$$

Il suffira de considérer la suite $-S_e$ des transferts élémentaires effectués pour passer F_0 à F, et la suite des systèmes de relation R_e correspondant, puis de remonter de A à 0 le chemin AO de l'arborescence jusqu'à ce que à l'étape considérée, le vecteur b' vérifie le système de contraintes

$$R'(H) = R_{\tilde{E}} - \sum_{e \in -Se} R_e$$

R_e correspondant aux h premières étapes de la suite $-S_e$ permettant de passer de A à H.

.../...

Puis nous chercherons suivant la méthode du chapitre VII les chemins de transfert élémentaire permettant de passer de H à A' - A' correspondant à la solution optimale du problème F') en créant le nouveau système définissant la nouvelle zone Z(B')

$$R'_{\tilde{E}} = R'_{H} + \sum_{H \to A'} R'_{e}$$

.../...

Exemple :

Soit à résoudre le problème F

$$\sum_j x_{ij} = a_i$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Min } f = \sum c_{ij}\, x_{ij}$$

				$b_j =$
15	2	7	9	14
1	8	3	4	16
6	7	1	6	23
$a_i =$ 15	12	12	14	

---

la solution de F_0 est

				$b_j =$
	12			12
15			14	29
		12		12
$a_i =$ 15	12	12	14	

et elle correspond au système

$$R_0 : \quad a_1 + a_4 \geq b_2 \qquad a_2 \leq b_1 \qquad a_3 \leq b_3$$

Tableau T_1

	1	2	3
1			
2	5		2
3			

$\tilde{e}_1(23)$ est optimal

$\delta = \Delta_3 = 11$ $\quad F_1 =$

				b_j
	12			12
15			3	18
		12	11	23
$a_i =$ 15	12	12	14	

correspondant au système

$$R_{e_1} : \quad a_3 + a_4 \geq b_3 \qquad a_1 + a_3 + a_4 \geq b_3 + b_2$$

Tableau T_2

	1	2	3
1			
2	5		2
3	3	-2	

$\tilde{e}(21)$ est optimal

$\delta = \Delta_1 = 2$ $\quad F_2 =$

				b_j
	12		2	14
15			1	16
		12	11	23
$a_i =$ 15	12	12	14	

correspondant au système

$$R_{e_2} : \quad a_2 + a_3 + a_4 \geq b_1 + b_3 \qquad a_1 \leq b_2 \qquad \Sigma a = \Sigma b$$

la solution finale optimale

correspondant à l'arbre a.

				b_j
	12		2	14
15			1	16
		12	11	23
$a_i =$ 15	12	12	14	

.../.

correspondant au système

$$R_E \quad \begin{cases} a_2 \leq b_1 \\ a_3 \leq b_3 \leq a_3 + a_4 \\ a_1 \leq b_2 \leq a_1 + a_4 \\ \Sigma a = \Sigma b \end{cases}$$

définissant la zone Z(B).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABADIE J. "Approvisionnement des centrales thermiques et généralisations du problème de transport" Rev. Fr. Rech. Op. 7 1958

[2] ABADIE J. "Un nouvel algorithme pour les programmes linéaires : le principe de décomposition de Dantzig et Wolfe" Rev. Fr. Rech. Op. 15 1960

[3] ABADIE J. "La methode primale duale d'après Dantzig Ford et Fulkerson" Cours d'été E.D.F.-C.E.A.

[4] ARINAL J.C. Compte rendu à l'Académie des Sciences

[5] BELLMAN R. "Notes on the theory of Dynamic Programming transportation Models" Management Science p. 191 1958

[6] BECKMANN C. GUIRE WINSTEN "Studies in the economic of transportation" yale university press 1956

[7] BERGE C. "Théorie des graphes et ses applications" Dunod Paris 1958

[8] BERGE C. "Espaces topologiques et Fonctions multivoques" Dunod Paris 1959

[9] BOWMAN E.H. "Production scheduling by the transportation method in linear programming" J.O.R.S.A. vol 4 Août 1956

[10] BRIGGS "Solution of the Hitchcock problem with one single row capacity constraint per row by the Ford-Fulkerson method" Naval research logistic quaterly.

[11] CHARNES A. COOPER W. "The stepping-stone method of exploining linear programming calculations in transportation problems" Management science oct 1959 vol 1 n° 1

[12] DANTZIG G.B. "Programming in a linear structure" Econometrica 17.1.1949

[13] DANTZIG G.B. "Application of the Simplex Method to a transportation Problem" Proceedings of the conference on linear programming Chicago 1949

[14] DANTZIG G.B. FORD-FULKERSON "A Primal-Dual Algorithm for linear programs" Annals of Mathematics studies n°. 38 Princeton University Press

.../...

[15] DANTZIG G.B. WOLFE

"Decomposition principle for linear programs"

[16] DENNIS J. "Mathematical programming and Electrical Networks" the technology press of the Masschussets' Institute of Technology 1959

[17] DWYER P. "The solution of the Hitchcock Transportation Problem with a Method of Reduced Matrix" University of Michigan 1955

[18] FORD L. FULKERSON

"Maximal Flow through a Network" canadien journal of Mathematics 1956

[19] FORD L. FULKERSON

"A Primal Dual Algorithm for the capacited Hitchcock Problem"

Naval Research Logistics quaterly 1957

[20] GENUYS F. "Parametrisation du 2ème membre et de la fonction économique Groupe M.P.E. AFCALTI SOFRO Avril 1961

[21] HOUTAKKER H. "On the Numerical Solution of the transportation Problem" J.O.R.S.A. 1955 vol 3 nº 2

[22] HUARD P. "Methode de KRON" Rev. Fr. de Recherches Opérationnelles

[23] HUARD P. "Paramétrisation complète du second membre dans un programme de transport"
Note E.D.F. HX 595/372 Janvier 1961

[24] HUARD P. "Quelques possibilités d'application de la méthode de Décomposition des programmes linéaires"
Note E.D.F. HX 257/365 Octobre 1960

[25] KAUFMANN A. "Méthodes et Modèles de la Recherche Opérationnelle" DUNOD PARIS 1959

[26] KUHN H.W. "The Hungarien Method for the Assignment Problem" N.R.L.Q. Vol 2 Mars Juin 1955

[27] LE GARFF. A. "Sur la résolution des Programmes de transport et d'affectation de très grandes dimensions".
Congrès AFCALTI SOFRO Octobre 1961

[28] MAGHOUT K. COMES G. STEINBERG N.

"Généralisation à n dimensions du Problème de transport" Rev. Fr. de Rech. Op. 1962

.../...

[29] SIMONNARD M.
"Programmation linéaire" DUNOD PARIS 1962

[30] SIMONNARD M.
"Structure des bases dans les problèmes de transport"
Rev. Fr. de Rech. Op. 1959

[31] VAJDA S.
"The theory of games and linear programming"
Wiley New York 1956

[32] ZIMMERN B.
"Résolution des programmes de linéaires de transport par la méthode de séparation en étoile"
Rev. Fr. de Recherche Opérationnelle 1957.